Atti del
CONVEGNO MATEMATICO

IN CELEBRAZIONE DEL CENTENARIO DELLA NASCITA
DI

GUIDO FUBINI E FRANCESCO SEVERI

Torino, 8-10 ottobre 1979

SUPPLEMENTO AL VOL. 115 DEGLI
Atti della Accademia delle Scienze di Torino
I. Classe di Scienze Fisiche, Matematiche e Naturali

TORINO
ACCADEMIA DELLE SCIENZE
1982

CATALDO AGOSTINELLI

DISCORSO DI APERTURA

Aprendo questo Convegno Matematico per celebrare il centenario della nascita di Guido Fubini e Francesco Severi, che entrambi furono Soci di questa Accademia, mi è molto gradito intanto porgere il più caloroso saluto dell'Accademia e mio personale alle Autorità che sono intervenute a questa cerimonia e agli illustri rappresentanti delle Accademie e degli Istituti che hanno aderito al Convegno, con un particolare ringraziamento al Prof. Rolando Rigamonti, Rettore del Politecnico di Torino, il quale Istituto per trent'anni ebbe il Fubini come Maestro insigne e che generosamente ha contribuito alla realizzazione di questo Convegno.

Il mio saluto cordiale infine a tutti i partecipanti e soprattutto agli oratori che con le loro relazioni non solo illustreranno l'opera dei due eminenti matematici, ma porteranno anche un contributo di alto valore scientifico col riferimento di risultati su ricerche personali nell'ambito degli studi da Essi coltivati.

L'opera scientifica di Guido Fubini e Francesco Severi risulterà in gran parte illustrata dalle relazioni che saranno svolte dai vari oratori, per eui io mi limiterò a qualche cenno sommario e a qualche completamento, specialmente su Guido Fubini che sta più vicino a noi per l'alto magistero che ha esercitato nella nostra Città, per il contributo luminoso dato a questa sede alla scienza matematica, per l'efficace preparazione data a numerosi allievi e per la formazione culturale di molteplici generazioni di allievi ingegneri, fornendo loro i fondamenti rigorosi del Calcolo per lo studio delle più difficili discipline tecniche, allievi, che divenuti ingegneri, hanno reso grandi servigi all'industria italiana e straniera.

Di Francesco Severi esistono diverse commemorazioni fatte dopo la Sua morte, fra cui spicca quella letta da Beniamino Segre all'Accademia dei Lincei il 15 dicembre 1962 e riprodotta nel primo volume delle «Opere Matematiche» di Severi, pubblicate a cura della stessa Accademia dei Lincei. Anche gli «Atti» della nostra Accademia posseggono una bella e dotta commemorazione di Severi, letta in questa sala dal collega Ermanno Marchionna nella seduta del 13 marzo 1963.

Di Fubini invece, mancato improvvisamente a New York il 6 giugno 1943,

quando ancora infuriava la seconda guerra mondiale e l'Italia era sconvolta dalle calamità di questa guerra, non si ebbero subito delle commemorazioni. Solo diversi anni più tardi, il 13 novembre 1954 veniva solennemente commemorato, ancora da Beniamino Segre, all'Accademia dei Lincei, con un elevato discorso inserito nel primo dei tre volumi contenenti le Sue «Opere scelte» e pubblicate a cura della Unione Matematica Italiana. Ma gli «Atti» della nostra Accademia non contengono purtroppo alcuna traccia di rievocazione della figura e dell'opera di Guido Fubini, se non una scarna scheda biografica dell'Annuario del 1972. Per questo chiedo venia se mi soffermerò alquanto a parlare di questo grande Maestro.

Guido Fubini nacque a Venezia, da famiglia piemontese, il 19 gennaio 1879 e sin dalla più tenera età dimostrò eccezionali attitudini verso gli studi matematici. Compiuti brillantemente gli studi medi nella Città natale Egli fu accolto nel 1896 quale allievo interno presso la Scuola Normale Superiore di Pisa. In questo Istituto, ove Egli trascorse il periodo formativo della Sua vita, ebbe come maestri Luigi Bianchi, Ulisse Dini ed Eugenio Bertini; ma fu specialmente il primo ad avere grande influenza su di Lui, a determinare le Sue vedute e i Suoi interessi matematici, il Suo amore per l'eleganza dei procedimenti che sono propri della geometria differenziale e della geometria proiettiva, le due discipline di cui più tardi ne realizzò la fusione, in un tutto organico, in numerosi lavori e nell'Opera «Geometria Proiettiva Differenziale», scritta in collaborazione con Čech.

Addottorato a Pisa nel 1900 con pieni voti e lode con la celebre tesi sul parallelismo di Clifford negli spazi ellittici, ebbe subito inizio la Sua attività estremamente fertile e brillante che in poco tempo lo portò alla cattedra universitaria, prima come professore incaricato nel 1903 all'Università di Catania e poi come titolare nel 1906 presso la stessa Università in seguito a concorso di cui era riuscito vincitore. Nello stesso anno passò a Genova per l'insegnamento dell'Analisi matematica e infine, nel 1908, fu chiamato, per la stessa disciplina, al Politecnico di Torino, ove rimase per trent'anni fino al 1938, quando fu dispensato dal servizio in seguito alle inique leggi razziali. Durante lo stesso periodo, salvo qualche breve interruzione, ebbe anche l'incarico dell'Analisi superiore presso la nostra Università diffondendo da questa sede i lumi del Suo sapere a molti allievi che poi si sono distinti nell'insegnamento o hanno raggiunto la cattedra universitaria.

Privato così della gioia dell'insegnamento dovette andare con la Sua famiglia esule a Parigi, ove fu colpito dalle prime avvisaglie del male che doveva poi stroncarne l'esistenza. Apparentemente ripresosi passò quindi negli Stati Uniti ove era stato chiamato dall'*Institute for advanced study* di Princeton. In questa sede, per la Sua statura di matematico geniale e la Sua forte personalità, in contrasto con la minutezza del Suo fisico, Gli valse il nomignolo scherzoso di *little giant*.

A Princeton ebbe accoglienze cordiali e affettuose di amici e colleghi e fu particolarmente lieto di conoscere fra essi Oswald Veblen ed Albert Einstein.

Ridestatisi i Suoi disturbi e i sintomi del male che l'affliggeva, si trasferì a New York presso quella Università, preferendo il clima di questa Città a quello di Princeton. Ivi per non pensare ai Suoi mali si immerse sempre più nella ricerca matematica lavorando fino agli ultimi momenti di vita.

L'Opera scientifica di Guido Fubini è così vasta e multiforme che è molto difficile accennarne in breve senza il rischio di sminuirla. Tuttavia dirò che un imponente complesso di ricerche è dedicato alla *teoria dei gruppi discontinui delle funzioni automorfe*, con svariate applicazioni dei gruppi continui alla geometria differenziale ed alle equazioni della dinamica.

Un altro argomento a cui il Fubini arrecò contributi fondamentali è quello del *principio di minimo* e delle sue estensioni, di cui parlerà il collega Aldo Ghizzetti nella sua relazione: «Aspetti dell'Opera di Guido Fubini nel campo dell'Analisi matematica». Fra i meriti del Fubini vi è anche quello di essere stato uno dei primi a dare rilievo alle idee scaturite dalla considerazione dell'integrale di Lebesgue, come sarà illustrato dal Prof. Tullio Viola.

Dei contributi di Fubini a un problema della teoria delle funzioni analitiche di più variabili, di cui si è occupato anche il Severi, dirà poi il Prof. Gaetano Fichera.

Ma le ricerche in cui il Fubini ha maggiormente dimostrato la Sua forza creativa sono quelle sulla grandiosa e organica costruzione della *Geometria Proiettiva Differenziale*, riprodotta nell'Opera a cui ho già accennato.

La vasta e multiforme attività scientifica di Fubini non è però limitata soltanto ai campi di ricerca di Analisi pura; essa si estende anche a diversi rami della Scienza applicata. Dotato di una grande capacità di orientamento Egli fu tra i primi a sostenere il valore della Teoria della Relatività con qualche articolo sui giornali, sebbene non abbia mai propriamente lavorato in tale campo. Di questo parlerà il Prof. Dionigi Galletto nella sua relazione su «Il pensiero di Eintein nell'opera di Guido Fubini e Francesco Severi».

Un ramo della matematica applicata che deve a Fubini contributi importanti è quello della *Balistica*. Da contatti avuti durante la prima guerra mondiale con ufficiali combattenti si era reso conto dell'insufficienza dei metodi allora noti nel caso di traiettorie molto curve nel tiro indiretto e di forti dislivelli fra l'origine e il bersaglio. Egli allora con nuovi metodi e intendimenti si accinse subito al calcolo della traiettoria e alla correzione del tiro, fondandosi sulla considerazione di un'equazione alle derivate parziali, da Lui ottenuta, alla quale soddisfa la gittata di un proietto. Di questi risultati ebbe un lusinghiero riconoscimento in Francia ove le Sue ricerche furono accolte nel «Memorial de l'Artillerie Francaise»: A questo proposito mi è molto gradito ricordare che in una delle Sue lezioni al

Politecnico nel 1916, quando appunto infuriava la guerra ed io ero studente del primo anno di ingegneria, ebbe a parlare di queste sue ricerche, pur non avendo mai visto un cannone, come si compiaceva dire, se non da dietro le grate delle finestre dell'Arsenale di Torino nella via omonima.

Notevoli anche i lavori di Fubini relativi al problema della dinamica in assenza di forze, che nella sua traduzione geometrica equivale a determinare tutti gli spazi riemanniani che ammettono un gruppo di trasformazioni che conservano le geodetiche, problema che le ricerche di Lie e König ne avevano mostrato la grande difficoltà. Successivamente Dini e Levi-Civita determinarono tutti gli spazi geodeticamente applicabili e il Fubini arrecò altri importanti contributi.

Nel campo della Fisica matematica il Fubini si occupò dell'estensione delle ricerche di Poincaré e Lauricella sulle vibrazioni delle membrane, della propagazione della luce in un mezzo non omogeneo e non isotropo, dell'influenza di uno strato dielettrico in un campo elettromagnetico e della teoria della trave inflessa. A queste ultime ricerche Egli era stato indotto dall'insoddisfazione risentita dal come gli ingegneri trattavano la statica di una trave elastica non rettilinea, proponendosi di estendere a questa, fin quanto possibile, la teoria di Saint-Venant.

L'interesse di Fubini verso le applicazioni della matematica alla Fisica e all'Ingegneria, spronato anche dal desiderio di seguire e aiutare i Suoi figli nei loro studi, andava molto al di là, come si rileva dalla lettura de «La Matematica degli Ingegneri», opera enciclopedica scritta negli ultimi anni in collaborazione con Albenga, rimasta purtroppo al primo volume.

Particolari e amorevoli cure ebbe poi il Fubini nella redazione delle Sue «Lezioni di Analisi Matematica», Opera limpidissima giunta alla 5ª edizione, nella quale Egli profuse i tesori della Sua lunga e sagace esperienza didattica. Di queste mirabili Lezioni parlerà il collega Piero Buzano che fu allievo del Fubini e che da molti anni occupa quella che fu la Sua cattedra.

Contributi notevoli su argomenti che si riallacciano all'opera di Fubini saranno comunicati in questo Convegno da altri Suoi illustri allievi. La Profª Maria Cinquini Cibrario, dell'Università di Pavia, parlerà di «Risultati antichi e recenti in teoria delle caratteristiche». Il Prof. Ubaldo Richard, dell'Università di Padova riferirà su «Teoremi di confronto e di oscillazioni per equazioni differenziali lineari di secondo ordine». Vi saranno poi relazioni, che riflettono sempre l'opera di Fubini, della Profª Fulvia Skof «Intorno a una equazione funzionale» e del Prof. Luigi Gatteschi su «Il contributo di Guido Fubini agli algoritmi iterativi», entrambi della nostra Università. Altri contributi su questioni specifiche relative a un'equazione con parametro evanescente e all'integrazione dell'equazione di Duffing e sue estensioni, saranno poi esposti dai Proff. Placido Cicala e Silvio Nocilla del Politecnico di Torino.

Parlatore vivace ed arguto il Fubini nelle Sue lezioni affascinava e riusciva a

tenere desta l'attenzione con la Sua voce tonante, il gesto espressivo e la parola chiara e scultorea. Attirati dall'efficacia del Suo insegnamento gli allievi accorrevano in gran numero alle Sue lezioni e lo ascoltavano con religiosa attenzione. Verso i migliori era prodigo di consigli e di aiuti e non lesinava loro le lodi quando nelle loro ricerche pervenivano a qualche risultato notevole.

Mi piace infine ricordare come il Fubini fosse molto generoso verso i bisognosi; benché di religione ebraica interveniva spesso a portare il Suo contributo per i poveri e per le iniziative della Parrocchia di S. Tommaso, a cui apparteneva la Sua abitazione di Via Pietro Micca 12, in Torino, appena il Parroco gliene faceva richiesta.

Ed ora dovrei parlare della vita e dell'opera di Francesco Severi. Il tempo riservato a questa mia introduzione non me lo consente. Tuttavia ne darò un brevissimo cenno.

Francesco Severi, nato ad Arezzo il 13 aprile 1879 da famiglia di patrioti, ebbe un'infanzia segnata da dolorose vicende per la morte violenta del padre e susseguenti ristrettezze economiche. Ma pur nella sventura e nelle asperità della vita, Egli, di carattere forte, di tenace volontà e dotato di una eccezionale capacità di lavoro riuscì a formarsi un'ampia e varia cultura generale. Si laureò a Torino con Corrado Segre nel 1900 e da questo insigne maestro trasse il Suo interessamento alle questioni algebriche e numerative, accompagnato da larghe vedute geometriche.

Passato da Torino a Bologna e poi a Pisa, dove fu successivamente assistente dei due grandi maestri Federico Enriques ed Eugenio Bertini, sotto l'influenza specialmente dell'Enriques, che fu uno dei creatori della Scuola algebrico-geometrica italiana, intensificò ed elevò la Sua già solida attività di studioso e di ricercatore, inserendosi decisamente nel nuovo e difficile campo della geometria sopra una superficie algebrica. I numerosi e smaglianti risultati ottenuti in questi studi lo portarono subito alla cattedra universitaria a soli venticinque anni, e Gli valsero poi i più alti ed ambiti riconoscimenti.

I contributi più significativi del Severi, che hanno avuto ed hanno tuttora una enorme influenza nello sviluppo matematico del nostro secolo, sono quelli relativi alla geometria algebrica, di cui è stato uno dei principali fondatori, e particolarmente quelli sull'indagine delle proprietà delle superficie e varietà algebriche invarianti per trasformazioni birazionali. Ma Egli ebbe ad occuparsi anche, con grande successo, di altri campi, come quelli delle funzioni analitiche di più variabili complesse, della geometria numerativa e proiettiva e della geometria differenziale.

Nel 1939 creò l'Istituto di Alta Matematica, di cui divenne professore di Alta Geometria e Presidente. Molti dei matematici che in Italia giunsero alla cattedra

universitaria ebbero a passare per questo Istituto.

Afflitto negli ultimi anni da penose sofferenze fisiche, nella serenità e nel conforto di una ritrovata fede, cessava di vivere in Roma l'8 dicembre 1961.

Relazioni che si riallacciano all'opera di Francesco Severi, e ne illustrano alcuni aspetti, e mettono in rilievo nuovi sviluppi, saranno tenute da illustri cultori di scienze geometriche. Il Prof. Aldo Andreotti della Scuola Normale Superiore di Pisa parlerà «Sopra il lemma di Poincaré pei complessi di operatori differenziali». Il Prof. Ermanno Marchionna dell'Università di Milano riferirà «Sui caratteri dei divisori di una varietà algebrica». Il Prof. Davide Demaria della nostra Università illustrerà il contributo di Francesco Severi alla topologia. Il Prof. Alberto Conte, pure nella nostra Università, farà conoscere gli «Sviluppi recenti dell'opera geometrica di Francesco Severi nel campo della geometria numerativa, delle curve algebriche e della teoria della intersezione». Infine il Prof. Franco Fava dirà «delle trasformazioni classiche e fibrati di getti».

A tutti auguro ora il più proficuo lavoro, coll'auspicio che da questa Accademia, in cui aleggia lo spirito di Luigi Lagrange, che ne fu il fondatore, parta il convincimento che la Matematica italiana è ancora e sempre all'altezza delle sue antiche tradizioni.

ALDO GHIZZETTI

ASPETTI DELL'OPERA DI GUIDO FUBINI NEL CAMPO DELL'ANALISI MATEMATICA

Con questa relazione mi propongo di porre in particolare evidenza alcuni aspetti della vastissima opera scientifica di Guido Fubini (193 note o memorie e 6 trattati). Prenderò in considerazione sei argomenti nei quali Fubini va considerato come precursore di moderne teorie (§§1, 2, 5) oppure come autore di risultati ai quali è indissolubilmente legato il Suo nome (§§3, 4, 6); tratterò infine un settimo argomento parlando di un suo lavoro mai pubblicato (§7).

Vi prego di scusarmi se citerò talvolta anche qualche mia attività collegata a quelle di Fubini. Devo far presente che ho passato dieci anni accademici al Suo fianco, due come studente (1928 - 30) e otto come assistente (1930 - 38), onde mi è impossibile cancellare del tutto la folla di ricordi che in me suscita questa rievocazione di alcuni suoi lavori.

1. Il primo lavoro di Guido Fubini che voglio considerare è del 1903 e reca il titolo «*Di un metodo per l'integrazione e lo studio delle equazioni a derivate parziali*» (vedi [6]). Il metodo in questione è quello che oggi si chiama *delle differenze finite* ed il lavoro considerato sembra essere il primo in cui ne sia stato fatto uso per equazioni a derivate parziali. Però, in tutti i lavori e testi che conosco, questo lavoro di Fubini è completamente ignorato e, nel libro recentissimo di W. F. Ames (vedi [1]) si attribuisce il primo impiego del metodo alle equazioni a derivate parziali ad un lavoro di C. Runge del 1908. D'altra parte, nel lavoro di Fubini, sono citati soltanto i noti precedenti per le equazioni differenziali ordinarie e perciò credo che si possa quasi certamente attribuire a Fubini la paternità del metodo.

In [6] viene considerato il seguente problema (lineare, di tipo iperbolico): trovare, nel quadrato $Q(0 \leqslant x \leqslant 1, 0 \leqslant y \leqslant 1)$, una soluzione dell'equazione

$$(1.1) \qquad \frac{\partial^2 z}{\partial x\, \partial y} + a(x,y)\frac{\partial z}{\partial x} + b(x,y)\frac{\partial z}{\partial y} + c(x,y)\, z = \varphi(x,y),$$

che, sui due lati $y = 0$ e $x = 0$ di Q, assuma valori prefissati:

$$z(x,0) = F(x), \qquad z(0,y) = G(y), \qquad [F(0) = G(0)]. \tag{1.2}$$

Diviso Q in n^2 quadratini di lato $1/n$, in corrispondenza ad ogni quadratino

$$\left(\frac{p-1}{n} \leqslant x \leqslant \frac{p}{n}, \ \frac{q-1}{n} \leqslant y \leqslant \frac{q}{n}\right), \qquad (p,q = 1, 2, \ldots, n),$$

si scrive che nel vertice (x_{p-1}, y_{q-1}) sussiste la seguente equazione ottenuta da (1.1) sostituendo ad ogni derivata il corrispondente rapporto incrementale generato dall'incremento $1/n$ della x, o della y, o di entrambe le variabili (1):

$$\frac{z_{pq} - z_{p-1,q} - z_{p,q-1} + z_{p-1,q-1}}{1/n^2} + a_{p-1,q-1}\frac{z_{p,q-1} - z_{p-1,q-1}}{1/n} + \tag{1.3}$$

$$+ b_{p-1,q-1}\frac{z_{p-1,q} - z_{p-1,q-1}}{1/n} + c_{p-1,q-1}z_{p-1,q-1} = \varphi_{p-1,q-1},$$

$$(p,q = 1, 2, \ldots, n).$$

Le (1.3) costituiscono un sistema di n^2 equazioni algebriche e lineari che legano $(n+1)^2$ valori del tipo z_{pq} $(p,q = 0, 1, \ldots, n)$; fra questi sono noti, in forza di (1.2), quelli del tipo z_{00}, z_{p0}, z_{0q} $(p,q = 1, 2, \ldots, n)$ che sono in numero di $2n+1$ e perciò le (1.3) possono riguardarsi come n^2 equazioni nelle n^2 incognite z_{pq} $(p,q = 1, 2, \ldots, n)$. Considerando successivamente i quadratini $p = 1, 2, \ldots, n$ della colonna $q = 1$, poi quelli $p = 1, 2, \ldots, n$ della colonna $q = 2$, ecc., si vede immediatamente che dalle (1.3) restano univocamente determinate tutte le predette n^2 incognite z_{pq}. Assieme ai $2n+1$ valori noti della $z(x,y)$ nei vertici dei quadratini che stanno sugli assi x, y, restano così individuati n^2 valori *approssimati* della $z(x,y)$ in ciascuno degli n^2 rimanenti vertici dei quadratini. Nasce allora, in modo ovvio (suddividendo, per esempio, ogni quadratino in due triangoli con le diagonali $x + y =$ costante) una superficie $z = z_n(x,y)$, poliedrica a facce triangolari, che può pensarsi come un'approssimazione della superficie diagramma della soluzione $z = z(x,y)$ del nostro problema. Appare plausibile che sia

$$z(x,y) = \lim_{n\to\infty} z_n(x,y)$$

e Fubini effettivamente prova, per questa via e con un calcolo ingegnosissimo, l'esistenza e l'unicità della soluzione $z(x,y)$; anzi arriva addirittura ad esprimerla

(1) Invece di scrivere $z(x_p, y_q), a(x_p, y_q), \ldots$ scriviamo brevemente $z_{pq}, a_{pq}, \ldots$

mediante una serie uniformemente convergente in Q.

Nello stesso lavoro Fubini prende anche in considerazione un problema lineare di tipo ellittico; quello di Dirichlet per l'equazione $\partial^2 z/\partial x^2 + \partial^2 z/\partial y^2 = 0$ ed il quadrato Q. Egli imposta il metodo in modo analogo a quello del problema precedente, ma dichiara esplicitamente di non essere ancora arrivato a dominare il calcolo ed il successivo passaggio al limite, così come gli era riuscito nell'altro caso. Fubini non ha più pubblicato nulla su quest'argomento e quindi è da ritenere che mai sia riuscito a superare le gravi difficoltà incontrate. La ragione di ciò sta nel fatto che Egli pretendeva troppo dal metodo che, nel periodo successivo (1903 - 1923; vedi bibliografia in [1], pag. 39), venne quasi esclusivamente usato come procedimento di calcolo numerico approssimato. Soltanto nel 1928, in una classica memoria di R. Courant - K. Friedrichs - H. Lewy (vedi [3]), il metodo delle differenze finite è stato ripreso per trattare questioni esistenziali (relative ad equazioni ellittiche, iperboliche o paraboliche), ma con una tecnica diversa da quella di Fubini. Col linguaggio di oggi, possiamo dire che i tre Autori citati sono ricorsi ai cosiddetti *criteri di compattezza* per far vedere che dall'insieme delle superficie poliedriche di cui sopra è possibile estrarre una successione convergente verso la soluzione del problema. Il Fubini si interessò molto al lavoro sopra citato e ne abbiamo parlato numerose volte, dopo che nel 1929 me lo aveva suggerito come punto di partenza per la mia tesi di laurea.

2. Grande importanza hanno i lavori di Fubini dedicati alla ricerca del minimo [al variare della funzione $u(x,y)$ in una prefissata classe K] di un integrale doppio del tipo

$$I(u) = \iint_{\Omega} f(x, y, u, p, q)\, dx\, dy, \qquad \left(p = \frac{\partial u}{\partial x}, q = \frac{\partial u}{\partial y}\right), \tag{2.1}$$

ove Ω è un campo limitato del piano xy. Come è noto, tale ricerca è collegata a certi problemi al contorno per l'equazione a derivate parziali

$$\frac{\partial f}{\partial u} - \frac{\partial}{\partial x}\frac{\partial f}{\partial p} - \frac{\partial}{\partial y}\frac{\partial f}{\partial q} = 0 \tag{2.2}$$

che è la cosiddetta *equazione di Eulero* relativa all'integrale $I(u)$.

Fubini ha dedicato a quest'argomento sette lavori (vedi [7], [8], [9], [10], [12], [14], [19]), ma il principale è il [7], pubblicato nel 1907, ove prende in considerazione il caso

(2.1′) $$I(u) = \iint_{\Omega} (p^2 + q^2)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y,$$

(2.2′) $$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0,$$

e stabilisce un nuovo metodo di studio del problema di minimo, che poi applicherà anche ad altri casi, nei lavori successivi. Specialmente notevole è il lavoro [19] del 1937 ove la (2.2) è un'equazione suggerita dalla teoria della flessione delle travi ad asse curvo.

Col metodo dato in [7], Guido Fubini è oggi universalmente riconosciuto come precursore dei più moderni metodi usati nel calcolo delle variazioni per integrali multipli. In questa breve relazione non posso nemmeno accennare a come i concetti di Fubini si siano successivamente evoluti; su ciò rimando ad una recente pubblicazione di Enrico Magenes (vedi [26]) e qui mi limito ad un cenno sul risultato conseguito da Fubini in [7].

In tale lavoro si prende in esame, nel campo Ω, il problema di Dirichlet per l'equazione di Laplace (2.2′); si assegnano cioè i valori della $u(x, y)$ sulla frontiera $\partial\Omega$ di Ω. Per risolverlo, si considera una certa classe K di funzioni $u(x, y)$ definite in Ω (che, fra l'altro, devono assumere su $\partial\Omega$ i valori prefissati) e si cerca se, in K, esista una funzione $U(x, y)$ che renda minimo l'integrale $I(u)$ dato da (2.1′), cioè che sia tale da aversi

(2.3) $$I(U) = d \qquad \text{con} \qquad d = \inf_{u \in K} I(u) \geqslant 0.$$

La via classica per cercare questa $U(x, y)$ è quella di far ricorso alle cosiddette *successioni minimizzanti*, cioè a successioni $\{u_n\}$ di funzioni $u_n(x, y) \in K$ tali da aversi

(2.4) $$\lim_{n \to \infty} I(u_n) = d,$$

ed esaminare se si possa ottenere la $U(x, y)$ come *limite* di una successione siffatta, precisando però bene quale senso sia da attribuire alla scrittura

(2.5) $$\lim_{n \to \infty} u_n(x, y) = U(x, y).$$

Prima del lavoro di Fubini si intendeva la (2.5) nel senso che le $u_n(x, y)$ dovevano *convergere uniformemente in* Ω verso la $U(x, y)$ o almeno nel senso che fosse possibile estrarre da $\{u_n\}$ una successione parziale $\{u_{i_n}\}$, $(i_1 < i_2 < i_3 < \ldots)$ che risultasse uniformemente convergente in Ω verso $U(x, y)$. Si era però riconosciuto che in generale ciò non era possibile.

A questo punto interviene la scoperta di Fubini: Egli, valendosi della teoria dell'integrale di Lebesgue (2) e di un ragionamento geniale, mostra che *da ogni successione minimizzante* $\{u_n\}$ *è sempre possibile estrarre una successione minimizzante* $\{u_{i_n}\}$ che converga su quasi tutte le sezioni S_x *e* S_y *di* Ω *con le parallele agli assi coordinati x e y e uniformemente su ciascuna di queste.*

In altre parole: sulla proiezione Ω_x di Ω sull'asse x esiste un insieme N_x, di misura (lineare) nulla, tale che, per tutti gli $x \in \Omega_x - N_x$, la successione $\{u_{i_n}\}$converge in tutti i punti (x, y) della sezione S_x di Ω con la parallela all'asse y uscente dal punto $(x, 0)$ e vi converge uniformemente. Analogamente partendo dalla proiezione Ω_y di Ω sull'asse y.

Ottenuta la $U(x, y)$ dalla (2.5), *con questo nuovo significato del limite ivi indicato*, Fubini riesce a concludere che essa fornisce non solo il minimo di $I(u)$ nella classe K, ma anche la soluzione del problema di Dirichlet.

3. Passiamo ora a considerare il più celebre teorema dovuto a Fubini: quello di *riduzione degli integrali multipli* (3). Egli dedicò all'argomento 4 lavori (vedi [11], [13], [15], [21]) di cui l'ultimo pubblicato postumo nel 1949.

Sarebbe molto interessante fermarsi ad illustrare come il teorema in discorso sia stato suggerito a Fubini dalle Sue ricerche sul principio di minimo ricordate nel precedente §2 ed esporre in dettaglio il fatto che Egli abbia anche stabilito un *teorema inverso* di quello in questione (vedi [13]), riconoscendo poi che (vedi [15]) era già stato dato da Leonida Tonelli quattro anni prima.

Mi limiterò a illustrare brevemente il teorema di riduzione nel caso degli *integrali doppi*, perché so che l'argomento sarà oggetto di una più ampia relazione del Prof. Tullio Viola.

Sia E un insieme (limitato o no) del piano xy che sia *misurabile* (superficialmente) *secondo Lebesgue* (con misura finita o infinita). Consideriamo le sue proiezioni P_x, P_y rispettivamente sugli assi coordinati x e y, coll'avvertenza che non è affatto detto che P_x, P_y risultino insiemi misurabili (linearmente).

Per ogni $x \in P_x$ (o per ogni $y \in P_y$) consideriamo la sezione S_x (o S_y) di E con la retta parallela all'asse y, uscente dal punto $(x, 0)$ [oppure parallela all'asse x, uscente dal punto $(0, y)$]; accade anche qui che S_x, S_y possono essere non misurabili (linearmente). Ma si dimostra che, *per quasi tutti gli* $x \in P_x$, *la sezione* S_x *di E risulta misurabile (linearmente)* (4) *e analogamente per le sezioni* S_y.

---

(2) Allora (1907) questo tipo di integrale ideato da Lebesgue nel 1902 era ancora assai poco usato dagli analisti.

(3) Gli integrali considerati sono degli integrali di Lebesgue.

(4) Cioè ha misura (lineare) nulla l'insieme dei punti $x \in P_x$ per i quali risulta non misurabile (linearmente) la corrispondente sezione S_x.

Le sezioni S_x (o S_y) che sono misurabili (linearmente) hanno una misura (lineare) positiva o nulla e, se ci limitiamo a considerare quei punti $x \in P_x$ (o $y \in P_y$) per cui tale misura risulta positiva, diremo che essi costituiscono la *proiezione propria* P_x^* [o P_y^*] di E sull'asse x [o sull'asse y]; si dimostra che *queste due proiezioni proprie* P_x^*, P_y^* *sono misurabili (linearmente).*

Ciò premesso, ecco l'enunciato del teorema di Fubini: *se* E *è un qualsiasi insieme misurabile (superficialmente) del piano* xy *e* $f(x,y)$ *una funzione sommabile in* E, *si ha*

$$\iint_E f(x,y)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y = \int_{P_x^*} \mathrm{d}x \int_{S_x} f(x,y)\,\mathrm{d}y = \int_{P_y^*} \mathrm{d}y \int_{S_y} f(x,y)\,\mathrm{d}x,$$

ove gli integrali del secondo membro vanno così interpretati: per quasi tutti gli $x \in P_x$ *la sezione* S_x *risulta misurabile (linearmente) e la* $f(x,y)$ *(come funzione di* y*) sommabile in* S_x*; essa fornisce un integrale*

$$\int_{S_x} f(x,y)\,\mathrm{d}y$$

che è una funzione di x *sommabile nella proiezione propria* P_x^**. Analogamente per gli integrali del terzo membro.*

4. Un altro celebre risultato dovuto a Guido Fubini è il seguente teorema di derivazione per serie (vedi [16]): *se*

$$u(x) = \sum_{n=1}^{\infty} u_n(x)$$

è una serie convergente di funzioni monotone (p.es. non descrescenti) definite in un intervallo $[a,b]$, *ivi è quasi ovunque lecita la derivazione per serie, cioè quasi ovunque si ha*

$$u'(x) = \sum_{n=1}^{\infty} u_n'(x). \tag{4.1}$$

Può forse meravigliare che nell'enunciato non sia esplicitamente formulata l'ipotesi che le $u_n(x)$, $u(x)$ siano derivabili (almeno quasi ovunque), ma bisogna tener presente che era già noto un teorema di Lebesgue secondo il quale *ogni funzione non decrescente è quasi ovunque derivabile.*

Inoltre, per rendersi conto della difficoltà insita nella dimostrazione di questo

teorema, occorre tener presente che, se $u(x)$ è una funzione non decrescente in $[a, b]$, la sua derivata $u'(x)$ è sommabile in $[a, b]$ ma, in generale, risulta verificata, per ogni $x \in [a, b]$, soltanto la

$$\int_a^x u'(t)\,dt \leqslant u(x) - u(a)$$

e non quella col segno di uguaglianza. In generale si ha dunque

$$u(x) - u(a) = \int_a^x u'(t)\,dt + v(x), \tag{4.2}$$

con $v(x)$ funzione non decrescente, non negativa, avente la derivata quasi ovunque nulla.

Scrivendo per ogni $u_n(x)$ la formula analoga alla (4.2):

$$u_n(x) - u_n(a) = \int_a^x u_n'(t)\,dt + v_n(x), \qquad (n = 1, 2, 3, \ldots) \tag{4.3}$$

e, tenendo conto che per ipotesi si ha

$$u(x) - u(a) = \sum_{n=1}^{\infty} [u_n(x) - u_n(a)],$$

si ottiene

$$\int_a^x u'(t)\,dt + v(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \left[\int_a^x u_n'(t)\,dt + v_n(x)\right]. \tag{4.4}$$

A questo punto Fubini, valendosi di un noto procedimento costruttivo delle $v(x)$, $v_n(x)$, dimostra che

$$v(x) = \sum_{n=1}^{\infty} v_n(x). \tag{4.5}$$

Ottenuta la (4.5) (che costituisce il punto essenziale della dimostrazione), la (4.4) diventa

$$\int_a^x u'(t)\,dt = \sum_{n=1}^{\infty} \int_a^x u_n'(t)\,dt$$

e questa, per un noto teorema di integrazione per serie dovuto a Beppo Levi, si può trasformare nella

$$\int_a^x u'(t)\,\mathrm{d}t = \int_a^x \sum_{n=1}^{\infty} u'_n(t)\,\mathrm{d}t.$$

Di qui, derivando rispetto a x (quasi dovunque) si perviene alla tesi (4.1).

5. Passo a considerare un altro lavoro di Guido Fubini, pubblicato nel 1925 e dedicato ad un problema di geometria algebrica, trattato con sviluppi analitici molto interessanti (vedi [17]). Desidero parlarne perché tale lavoro ha dato lo spunto ad uno mio del 1935 (vedi [22]) ed anche perché, dopo ben 42 anni, ricerche del tipo allora considerato sono state recentemente riprese da Ciro Ciliberto dell'Università di Napoli (vedi [2]).

Nel citato lavoro il Fubini si propone di determinare le superficie algebriche $z = \varphi(x, y)$ le cui sezioni piane sono tutte fra loro omografiche e, con abilissimi calcoli, conclude che tali superficie o sono dei coni oppure sono necessariamente delle superficie di grado $\leqslant 4$. Il lavoro è stato stampato assieme ad un altro di Gino Fano (vedi [4]) nel quale le predette superficie algebriche di grado $\leqslant 4$ sono individuate per via sintetica.

A questi lavori era collegato quest'altro problema ([5]): se si trasforma una curva piana C^n (algebrica di ordine n) con una omografia Ω_t (dipendente da un parametro t), si ottiene una curva variabile C_t^n; in tali condizioni, se esiste un valore t_0 del parametro t per il quale l'omografia Ω_{t_0} risulti degenere, cosa si può dire sulla curva limite di C_t^n per $t \to t_0$?

I lavori sopra citati di Fubini e Fano sembravano suggerire la previsione che tale curva limite fosse sempre una C^n spezzata in n rette. Io ho dimostrato che questa previsione era falsa: la curva limite è sempre spezzata in (una o più) *curve W di Klein-Lie*, cioè in curve algebriche che, rispetto ad un opportuno riferimento, hanno un'equazione del tipo

$$(5.1) \qquad x^m y^n = c z^{m+n}, \quad (x, y, z, \text{ coordinate omogenee, } c \text{ costante});$$

esse comprendono le rette ($m = 1, n = 0$) e le coniche ($m = n = 1$).

Si osservi che ogni curva (5.1) è mutata in sé dal seguente *gruppo* di omografie:

$$x : y : z = X : t^{m+n} Y : t^n Z;$$

([5]) Si pensi che è necessariamente degenere l'omografia trasformante una sezione con un piano non tangente alla superficie in una sezione con un piano tangente.

su quest'osservazione è basato il lavoro di C. Ciliberto che, servendosi della teoria dei gruppi di Lie, è riuscito a trattare il caso generale delle varietà limiti delle trasformate omografiche di una varietà assegnata, in uno spazio proiettivo ad un numero qualunque N di dimensioni.

6. Conviene ora dedicare una particolare attenzione ad un lavoro che Guido Fubini ha pubblicato nel 1937 e che riguarda studi asintotici per gli integrali di equazioni differenziali ordinarie lineari (vedi [20]). Per tali studi Egli si serve di un interessante procedimento risolutivo di dette equazioni, che però era già stato precedentemente considerato da altri Autori, per cui il procedimento è da vari anni chiamato *metodo di Liouville-Stecklòff-Fubini*. Il merito maggiore di Fubini è di averne messo in luce la grande potenza in problemi di valutazione asintotica e di stabilità.

Ecco una breve esposizione del metodo nel caso di un'equazione differenziale lineare omogenea del 2° ordine

$$y'' + p(x)\,y' + q(x)\,y = 0, \qquad x \in [a, b]. \tag{6.1}$$

Associamo alla (6.1) un'altra qualsiasi equazione dello stesso tipo

$$y'' + P(x)\,y' + Q(x)\,y = 0 \tag{6.2}$$

della quale sia già noto l'integrale generale; supponiamo cioè di conoscere di (6.2) due integrali $y_1(x), y_2(x)$ con wronskiano $W(x) \neq 0$.

La (6.1) può allora essere scritta nel modo seguente

$$y'' + P(x)\,y' + Q(x)\,y = [P(x) - p(x)]\,y' + [Q(x) - q(x)]\,y \tag{6.3}$$

e, ragionando come se il secondo membro fosse una funzione nota f, si può pensare di risolvere la (6.3) applicando il metodo di variazione delle costanti arbitrarie, che consiste nel porre

$$y = u_1 y_1 + u_2 y_2, \qquad y' = u_1 y_1' + u_2 y_2' \tag{6.4}$$

e nel ricavare le derivate u_1', u_2' delle due incognite u_1, u_2 dal sistema

$$u_1' y_1 + u_2' y_2 = 0, \qquad u_1' y_1' + u_2' y_2' = f. \tag{6.5}$$

Ricordando che f indica il secondo membro di (6.3), nel quale si possono esprimere y e y' con le (6.4), si vede che si può scrivere

$$f(x) = Y_1(x)\,u_1(x) + Y_2(x)\,u_2(x), \tag{6.6}$$

ove $Y_1(x)$, $Y_2(x)$ indicano le funzioni *note* definite da

$$Y_i = (P - p)\,y_i' + (Q - q)\,y_i, \qquad (i = 1, 2). \tag{6.7}$$

Dopo ciò dalle (6.5), tenendo conto di (6.6), si ricava

$$u_1'(x) = -\frac{y_2(x)}{W(x)}[Y_1(x)\,u_1(x) + Y_2(x)\,u_2(x)],$$

$$u_2'(x) = \frac{y_1(x)}{W(x)}[Y_1(x)\,u_1(x) + Y_2(x)\,u_2(x)]$$

e si ha pertanto (con c_1, c_2 costanti arbitrarie):

$$(6.8)\qquad \begin{aligned} u_1(x) &= c_1 - \int_a^x \frac{y_2(t)}{W(t)}[Y_1(t)\,u_1(t) + Y_2(t)\,u_2(t)]\,\mathrm{d}t,\\ u_2(x) &= c_2 + \int_a^x \frac{y_1(t)}{W(t)}[Y_1(t)\,u_1(t) + Y_2(t)\,u_2(t)]\,\mathrm{d}t. \end{aligned}$$

Le (6.8) costituiscono un sistema di due equazioni integrali lineari di Volterra nelle due incognite u_1, u_2 ed è ben noto che un tal sistema ammette una e una sola soluzione esprimibile con serie del tipo

$$(6.9)\qquad u_1(x) = \sum_{h=0}^{\infty} u_{1h}(x), \qquad u_2(x) = \sum_{h=0}^{\infty} u_{2h}(x)$$

ove i termini $u_{1h}(x)$, $u_{2h}(x)$ sono definiti per ricorrenza dalle formule seguenti

$$(6.10)\qquad \begin{cases} u_{10}(x) = c_1, \quad u_{1h}(x) = \\ = \displaystyle\int_a^x \frac{y_2(t)}{W(t)}[Y_1(t)\,u_{1,\,h-1}(t) + Y_2(t)\,u_{2,\,h-1}(t)]\,\mathrm{d}t, \\ u_{20}(x) = c_2, \quad u_{2h}(x) = \\ = \displaystyle\int_a^x \frac{y_1(t)}{W(t)}[Y_1(t)\,u_{1,\,h-1}(t) + Y_2(t)\,u_{2,\,h-1}(t)]\,\mathrm{d}t, \end{cases} \qquad (h = 1, 2, 3, \ldots).$$

Sostituendo le (6.9) nella prima delle (6.4) si ottiene per l'integrale generale $y(x)$ della (6.1) un'espressione in cui figurano le due funzioni arbitrarie $y_1(x)$, $y_2(x)$.

E' chiaro allora che, con una opportuna scelta di queste funzioni, sia talvolta possibile procurarsi delle espressioni di $y(x)$ che si prestino a scorgerne talune

proprietà, p.es. di comportamento asintotico per x tendente ad un punto singolare x_0 dei coefficienti $p(x)$, $q(x)$; il caso più comune è quello in cui $x_0 = +\infty$ e allora si possono p.es. ricavare criteri di stabilità di vario tipo. Nel lavoro [20] Fubini mostra interessanti applicazioni in tal senso: anch'io ho sviluppato, in cinque lavori pubblicati dal 1962 al 1965, varie altre applicazioni, ma mi limito a citare il quinto lavoro (vedi [24]).

7. Vengo infine a parlare di un lavoro di Fubini che, sfortunatamente, non è mai stato pubblicato. Nell'anno 1935 Fubini cominciò a interessarsi del calcolo simbolico degli elettrotecnici e del suo inquadramento nell'ambito della teoria delle trasformate di Laplace e su tale argomento tenne una conferenza nel gennaio 1936 (vedi [18]). Visto il mio vivo interesse per quest'argomento, Fubini mi propose di scrivere in collaborazione un libro, con una prima parte (di Sua redazione) sulla teoria della trasformazione di Laplace ed una seconda parte (da me redatta) sulle applicazioni alle reti di circuiti elettrici. Il lavoro si svolse negli anni 1936 e 1937 e, nei primi anni del 1938, spedimmo il manoscritto del libro al Consiglio Nazionale delle Ricerche per la sua pubblicazione sulla Collana di monografie matematiche edita dal C.N.R. Pochi mesi dopo vennero emanate le prime leggi razziali che provocarono il trasferimento della famiglia Fubini negli Stati Uniti e la comunicazione da parte del C.N.R. che il nostro libro non poteva essere pubblicato perché uno degli Autori era ebreo. D'altra parte era impossibile pubblicare, da solo, il testo da me scritto a causa dei continui riferimenti alla parte scritta da Fubini. Dopo molte incertezze tenendo conto che nel frattempo era comparso il libro di G. Doetsch (vedi [5]), mi decisi a fare il tentativo di riscrivere completamente la mia parte, aggiungendovi il minimo indispensabile delle nozioni teoriche mancanti e facendo riferimento al libro di Doetsch. Ciò richiese un lungo lavoro, svolto nel triennio 1939 - 41; il C.N.R. accettò la pubblicazione del nuovo testo e fu così che nel 1943 comparve il mio libro «*Calcolo simbolico*» (vedi [23]). Nel 1948 l'edizione era esaurita, ma non mi sentii di stamparne una seconda senza fare numerose aggiunte e profondi cambiamenti (fra cui l'uso sistematico dell'integrale di Lebesgue).

La nuova stesura si protrasse per molti anni e, soltanto dopo aver associato al mio libro l'amico Alessandro Ossicini, è comparsa nel 1971 (vedi [25]).

Mai ho potuto dimenticare tutto quello che devo a Fubini per la realizzazione di questo lavoro. Ho conservato con cura, per oltre quarant'anni, una copia del manoscritto della parte da Lui redatta; credo che sia giunto il momento di restituirlo alla Famiglia oppure depositarlo presso questa Accademia affinché resti il ricordo del grave torto che è stato fatto al nostro grande Maestro.

BIBLIOGRAFIA

[1] AMES W. F., *Numerical methods for partial differential equations*, 2ª edit., Academic Press, New York - San Francisco, 1977.

[2] CILIBERTO C., *Sulle varietà limiti delle trasformate omografiche di una varietà assegnata.* Ricerche di Matematica, vol. XXVI, 1977, pag. 161 - 176.

[3] COURANT R., FRIEDRICHS K., LEWY H., *Uber die partiellen Differenzengleichungen der mathematischen Physick*, Mathematische Annalen. Bd 100, 1928 - 29, pag. 32 - 74.

[4] FANO G., *Sulle superficie dello spazio S_3 a sezioni piane collineari*, Rend. Lincei, s. 6ª, vol. 1_1, 1925, pag. 473 - 477.

[5] DOETSCH G., *Theorie und Anwendung der Laplace-Transformation*, J. Springer, Berlin 1937.

[6] FUBINI G., *Di un metodo per l'integrazione e lo studio delle equazioni a derivate parziali*, Rend. Circ. Palermo, t. 17, 1903, pag. 222 - 235.

[7] FUBINI G., *Il principio di minimo e i teoremi di esistenza per i problemi al contorno relativi alle equazioni alle derivate parziali di ordine pari*, Rend. Circ. Palermo, t. 23, 1907, pag. 58 - 85.

[8] FUBINI G., *Il principio di minimo*, Rend. Circ. Palermo, t. 23, 1907, pag. 300 - 301.

[9] FUBINI G., *Il problema di Dirichlet considerato come limite di un ordinario problema di minimo*, Rend. Lincei, s. 5ª, vol. 16, 1907, pag. 162 - 167.

[10] FUBINI G., *Nuove applicazioni del principio di minimo (Il problema di Lord Kelvin)*, Annali di Matematica, s. 3ª, vol. 14, 1907, pag. 113 - 141.

[11] FUBINI G., *Sugli integrali multipli*, Rend. Lincei, s. 5ª, vol. 16, 1907, pag. 608 - 614.

[12] FUBINI G., *Le successioni minimizzanti nel calcolo delle variazioni*, Rend. Lincei, s. 5ª, vol. 19, 1910, pag. 796 - 801.

[13] FUBINI G., *Sugli integrali doppi*, Rend. Lincei, s. 5ª, vol. 22_1, 1913, pag. 584 - 589.

[14] FUBINI G., *Alcuni nuovi problemi di calcolo delle variazioni con applicazioni alla teoria delle equazioni integro-differenziali*, Annali di Matematica, s. 3ª, vol. 20, 1913, pag. 217 - 244.

[15] FUBINI G., *Su un teorema relativo agli integrali doppi*, Rend. Lincei, s. 5ª, vol. 22_2, 1913, pag. 67.

[16] FUBINI G., *Sulla derivazione per serie*, Rend. Lincei, s. 5ª, vol. 24_1, 1915, pag. 204 - 206.

[17] FUBINI G., *Sulle varietà a sezioni piane collineari*, Rend. Lincei, s. 6ª, vol. 1_1, 1925, pag. 469 - 473.

[18] FUBINI G., *Una lezione sul calcolo funzionale degli elettrotecnici*, Conferenze Fis. Mat. Torino, 1936, pag. 141 - 152.

[19] FUBINI G., *Il principio di minimo nella teoria della flessione delle travi ad asse curvo*, Rend. Circ. Palermo, t. 61, 1937, pag. 87 - 99.

[20] FUBINI G., *Studi asintotici per alcune equazioni differenziali*, Rend. Lincei, s. 6ª, vol. 26_2, 1937, pag. 253 - 259.

[21] FUBINI G., *Il teorema di riduzione per gli integrali doppi*, Rend. Sem. Univ. Politecnico, Torino, vol. 9, 1949, pag. 125 - 133.

[22] GHIZZETTI A., *Sulle curve limiti di un sistema continuo ∞^1 di curve piane omografiche*, Memorie Accad. Sc. Torino, t. 68, 1935 - 36, pag. 123 - 141.

[23] GHIZZETTI A., *Calcolo simbolico*, N. Zanichelli, Bologna 1943.

[24] GHIZZETTI A., *Maggiorazione degli integrali delle equazioni differenziali ordinarie lineari e criteri di stabilità*, dal volume «Stability problems of solutions of differential equations» (Proceedings of a NATO Advanced Study Institute held in Padua, september 6 - 18, 1965), Edizione Oderisi, Gubbio, 1966, pag. 211 - 243.

[25] GHIZZETTI A., OSSICINI A., *Trasformate di Laplace e calcolo simbolico*, UTET, Torino, 1971.

[26] MAGENES E., *Commemorazione di Guido Stampacchia*, Bollettino U.M.I., vol. 15-A, n. 3, 1978, pag. 715 - 736.

I lavori di G. Fubini qui citati, con l'eccezione di [18], sono stati ristampati nelle «Opere scelte» a cura dell'U.M.I. (Ed. Cremonese, Roma). Il [6] figura nel vol. I (1957), quelli da [7] a [12] nel vol. II (1958), quelli da [13] a [17] e da [19] a [21] nel vol. III (1962).

GAETANO FICHERA

I CONTRIBUTI DI FRANCESCO SEVERI E DI GUIDO FUBINI ALLA TEORIA DELLE FUNZIONI DI PIU' VARIABILI COMPLESSE.

L'opera scientifica di Guido Fubini, vastissima e multiforme, si svolge in campi della matematica che, in genere, sono assai lontani da quelli nei quali si dispiega l'opera non meno vasta e multiforme di Francesco Severi. Tuttavia vi è uno stesso problema del quale sia l'uno che l'altro si sono occupati: sistematicamente il Severi, occasionalmente e solo perché spintovi dallo studio dei lavori di questi, il Fubini. Tale problema è quello consistente nel caratterizzare sulla frontiera Σ di un campo limitato Ω di R^4 la traccia di una funzione di due variabili complesse che in Ω è funzione olomorfa di queste. I lavori che l'uno e l'altro hanno dedicato a questo problema ed alle questioni connesse certo non sono caratterizzanti per le personalità scientifiche di quei due grandi matematici, che in ben diversi indirizzi hanno lasciato orme indelebili del loro talento matematico, ma tuttavia i risultati da loro ottenuti in questo campo dànno, particolarmente per quanto riguarda il Severi, un chiaro segno della non comune capacità matematica degli Autori.

Mi è parso quindi non inutile, in un Convegno dedicato a ricordare questi due insigni matematici, intrattenermi a parlare su un problema che li vide entrambi impegnati, problema, d'altronde che, affrontato per la prima volta dal Severi ed immediatamente dopo dal Fubini, ha avuto in séguito notevoli sviluppi. Tali sviluppi, lungi dall'essersi esauriti nel tempo, lasciano aperti problemi e prospettive di indubbio interesse. Anche dei detti sviluppi vorrò brevemente parlare, onde mostrare, come pure in questo campo, il pensiero di Severi e di Fubini possa considerarsi pionieristico.

1. I teoremi di esistenza di Levi-Civita e di Severi.

Considerate le n variabili complesse $z_1 = x_1 + iy_1, \dots, z_n = x_n + iy_n$, indicheremo con Ω un loro insieme di variabilità nello spazio $\mathscr{C}^n$. Tale Ω può rappresentarsi mediante un insieme dello spazio cartesiano R^{2n} delle $2n$ variabili reali $x_1, y_1, \dots, x_n, y_n$. Supporremo sempre che Ω sia un aperto di tale spazio.

Il cosiddetto *punto di vista di Cauchy-Riemann* nella teoria delle funzioni di variabili complesse consiste nello studiare le funzioni analitiche di $z_1, \ldots, z_n$ come funzioni delle $2n$ variabili reali $x_1, y_1, \ldots, x_n y_n$, soluzioni del sistema lineare alle derivate parziali

$$(1) \qquad \frac{\partial w}{\partial \bar{z}_k} = 0 \qquad \left[\frac{\partial}{\partial \bar{z}_k} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial}{\partial x_k} + i\,\frac{\partial}{\partial y_k}\right);\ k = 1, \ldots, n\right].$$

Si tratta allora di ricercare le ulteriori condizioni da imporre alle soluzioni del sistema (1) affinché esista e sia determinata una soluzione di esso. Nel caso $n = 1$, data nel piano della variabile complessa z una curva regolare semplice Γ analitica, esiste una ed una sola funzione olomorfa $w(z)$ definita in un campo (cioè in un insieme aperto e connesso) contenente Γ, la quale su Γ coincide con una funzione assegnata $W(z)$, data arbitrariamente, purché funzione analitica dell'ascissa curvilinea su Γ.

E' questo il celebre teorema di esistenza e di unicità per il problema di Cauchy per le funzioni analitiche di una variabile complessa. Nel 1905 Tullio Levi-Civita, in una Nota lincea [1], considera il problema di Cauchy per una funzione analitica di due variabili complesse quando la *varietà portante i dati* è una superficie regolare semplice analitica Γ di R^4 non caratteristica per il sistema (1) di Cauchy--Riemann ($n = 2$). Con ciò s'intende che se

$$\psi^{(1)}(x_1, y_1, x_2, y_2) = 0, \qquad \psi^{(2)}(x_1, y_1, x_2, y_2) = 0$$

sono le equazioni di Γ, verificanti le note condizioni perché Γ sia regolare, semplice ed analitica, posto $\psi = \psi^{(1)} + i\psi^{(2)}$, in ogni punto di Γ si ha

$$\left|\frac{\partial \psi}{\partial \bar{z}_1}\right|^2 + \left|\frac{\partial \psi}{\partial \bar{z}_2}\right|^2 > 0.$$

Levi-Civita dimostra che:

I. *Se la superficie Γ dello spazio R^4 appartiene a C^ω (cioè è analitica) e non è caratteristica per (1), data $W \in C^\omega$, esiste una ed una sola funzione $w(z_1, z_2)$ olomorfa in un campo Ω, contenente Γ, la quale su Γ coincide con W.*

Levi-Civita accenna anche all'estensione del teor. I al caso di funzioni di n variabili complesse, nel quale la varietà Γ portante i dati è una varietà n-dimensionale di R^{2n}, regolare, semplice, analitica e non caratteristica per il sistema (1) secondo un'opportuna definizione. Successivamente egli osserva, seguendo Poincaré, che il problema consistente nell'assegnare i valori di una funzione olomorfa di due variabili complesse $w(z_1, z_2)$ su una curva di R^4 è *ipodeterminato*, laddove se si assegnano i valori di $w(z_1, z_2)$ su una varietà tridimensionale di R^4 si ha un problema *iperdeterminato*. Per tale ultimo problema egli scrive: . . . «*Si*

intravvede di qua la difficoltà della questione e si resta anzi dubbiosi se sia ragionevole porla» . . . (cfr. [1], p. 499).

In una serie di lavori apparsi agli inizi degli anni '30, Francesco Severi attaccò il problema della esistenza di una funzione olomorfa $w(z_1, z_2)$ quando i valori di essa sono assegnati su una varietà Σ tri-dimensionale di R^4 (1).

Malgrado lo scetticismo manifestato circa un quarto di secolo prima da Levi--Civita, il Severi pervenne a dare una completa soluzione del problema nel caso che Σ e la funzione W, assegnata su di essa, sono analitiche. In questo caso la risoluzione del *problema in grande* (esistenza di $w(z_1, z_2)$ olomorfa nel campo Ω quando la sua traccia W è assegnata su $\Sigma \equiv \partial\Omega$) è immediata conseguenza della risoluzione del problema locale (esistenza di w in un campo contenente un pezzo di varietà tri-dimensionale analitica su cui è data la sua traccia W).

Severi pose il problema come quello consistente nel caratterizzare tutte le funzioni W definite su Σ, che possono essere ivi la traccia di una funzione olomorfa $w(z_1, z_2)$. Dopo essersi a lungo intrattenuto sulla questione, ottenendo solo risultati parziali, nella Nota [5], con metodo tanto semplice quanto geniale, riuscì a dare completa soluzione al problema nelle ipotesi anzidette per Σ e W. Il procedimento da lui seguito, detto *metodo del passaggio dal reale al complesso*, gli permise non solo di risolvere il problema che si era posto, ma altresì di dare una nuova semplice dimostrazione del teorema di Levi-Civita, sopra riportato.

Sia Ω una 4-cella di R^4 (insieme omeomorfo ad un campo sferico 4-dimensionale). Il campo Ω sia limitato e la sua frontiera Σ sia una varietà analitica tri-dimensionale. Con ciò s'intende che, fissato comunque z_0 su Σ, esiste un intorno I_{z_0} di z_0 in R^4 tale che i punti di $\Sigma \cap I_{z_0}$ si rappresentano parametricamente al modo seguente:

$$z_1 = z_1(t_1, t_2, t_3), \quad z_2 = z_2(t_1, t_2, t_3) \quad (z_1 = x_1 + iy_1,\ z_2 = x_2 + iy_2),$$

essendo $z_k(t_1, t_2, t_3)$ $(k = 1, 2)$ funzione analitica delle tre variabili reali t_1, t_2, t_3 in un campo di R^3 e riuscendo sempre in tale campo uguale a 3 la caratteristica della matrice jacobiana

$$\frac{\partial(x_1, y_1, x_2, y_2)}{\partial(t_1, t_2, t_3)}.$$

Sia W una funzione definita su Σ ed appartenente a C^ω, con ciò intendendo che per ogni $z \in \Sigma \cap I_{z_0}$ la W è funzione analitica di t_1, t_2, t_3. Ciò equivale a dire che W è la traccia (restrizione) su Σ di una funzione analitica delle quattro variabili

(1) Cfr. [2], [3], [4], [5]. Cfr. anche, per una esposizione d'insieme, [6] ed il corso di lezioni [7].

reali x_1, y_1, x_2, y_2, definita in uno strato che contiene Σ.

Severi dimostra il seguente teorema.

II. *Nelle ipotesi assunte per* Ω, Σ, W, *condizione necessaria e sufficiente perché esista* $w(z_1, z_2)$ *olomorfa in* $\bar{\Omega}$ *e tale che sia* $w = W$ *in ogni punto di* Σ, *è che su* Σ *si annulli il determinante jacobiano di* W, z_1, z_2, *rispetto alle coordinate locali* t_1, t_2, t_3, *cioè*

$$\frac{\partial(W, z_1, z_2)}{\partial(t_1, t_2, t_3)} = 0. \tag{2}$$

La (2) può riguardarsi come un'equazione lineare alle derivate parziali del prim'ordine su Σ nella incognita W. La chiameremo *equazione* (alle derivate parziali) *di Severi*. Essa solo apparentemente dipende dalle coordinate locali t_1, t_2, t_3 scelte su Σ. In effetti la (2) null'altro esprime che l'annullarsi su Σ della restrizione a Σ della forma differenziale esterna di grado 3: $dW \wedge dz_1 \wedge dz_2$. Scriveremo allora sotto forma intrinseca l'equazione di Severi al modo seguente:

$$dW \wedge dz_1 \wedge dz_2 = 0 \qquad \text{su } \Sigma. \tag{3}$$

La necessità della (2) [cioè della (3)] si prova subito osservando che l'olomorfia di w in $\bar{\Omega}$ equivale all'equazione

$$dw = \frac{\partial w}{\partial z_1} dz_1 + \frac{\partial w}{\partial z_2} dz_2 \qquad \left[\frac{\partial}{\partial z_k} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial}{\partial x_k} - i\frac{\partial}{\partial y_k}\right), k = 1, 2\right]$$

e quindi: $dw \wedge dz_1 \wedge dz_2 = 0$ in $\bar{\Omega}$. Questa implica la (3) su Σ. Assai più difficile è dimostrare la sufficienza della (3). L'idea del ragionamento di Severi è la seguente. Fissato z^0 su Σ e dette t_1^0, t_2^0, t_3^0 le sue coordinate locali su Σ, la W può, in un intorno di (t_1^0, t_2^0, t_3^0), considerarsi come funzione analitica di tre variabili complesse t_1, t_2, t_3, dato che in un intorno del detto punto essa è somma di una serie tripla di potenze nelle tre variabili $t_k - t_k^0$, che possono ben pensarsi come complesse. Lo stesso dicasi delle funzioni $z_1(t_1, t_2, t_3)$ e $z_2(t_1, t_2, t_3)$. In un intorno di (t_1^0, t_2^0, t_3^0), quindi, a tutte le variabili che intervengono al primo membro di (2), dipendenti o indipendenti, può darsi significato nel campo complesso e la (2) pensarsi valida in tal campo, dato che il primo membro della (2), essendo funzione analitica di t_1, t_2, t_3 ed annullandosi quando le t_1, t_2, t_3 assumono valori reali, si annullerà anche per valori complessi di queste.

Fatto questo *passaggio dal reale al complesso*, l'esistenza di una $w(z_1, z_2)$ che in un intorno di z^0 su Σ coincide con W, segue, come giustamente osserva Martinelli [8], dal *teorema della dipendenza funzionale*, secondo cui l'annullarsi identico dello jacobiano di W, z_1, z_2 rispetto alle variabili complesse t_1, t_2, t_3, implica che W deve essere funzione analitica di z_1, z_2. In effetti, bisogna usare qualche

cautela nell'applicare il detto teorema, dato che esso, in genere, viene dato solo quando tutte le variabili in gioco sono reali e la dipendenza funzionale è intesa come dipendenza continua rispetto a variabili reali. Ma tale teorema può estendersi al campo complesso e la dipendenza funzionale essere intesa come dipendenza analitica rispetto alle variabili complesse. In effetti, la seconda parte della dimostrazione di Severi può interpretarsi appunto come un'estensione al campo complesso del citato teorema della dipendenza funzionale, classicamente noto nel campo reale. Poiché l'esistenza di $w(z_1, z_2)$ è provata nell'intorno di ogni punto di Σ e quindi in tutto uno strato attorno a Σ, il classico teorema di Hartogs assicurata la prolungabilità di w a tutto Ω.

2. La dimostrazione di Fubini del teorema di Severi. Estensioni del teorema di Hartogs.

Era appena apparsa la Nota lincea [5] di Severi con la dimostrazione del teor. II, che Guido Fubini pubblicava, sempre sui Rendiconti lincei, una Nota di tre pagine [9], nella quale dava una nuova dimostrazione del teorema di Severi.

L'idea di Fubini, semplice e suggestiva, muove, come già aveva fatto Severi, dall'intento di ricondurre il problema in grande a quello locale. A tal fine Fubini osserva che se dal punto z^0 di Σ si fa passare una superficie analitica Γ non caratteristica, contenuta in Σ, per il teorema di Levi-Civita esisterà una $w(z_1, z_2)$ olomorfa in un campo contenente Γ che su Γ coinciderà con W. Orbene, *l'equazione (2) di Severi null'altro esprime che la indipendenza di w dalla particolare* Γ *passante per* z^0.

Fubini spende pochissime parole per dimostrare tale fatto e la sua Nota dà l'impressione che il problema risoluto da Severi sia assai più semplice e più facile di quanto non appaia dai lavori di Severi, in particolare dalla Nota [5]. In effetti, tale impressione è da ritenersi non completamente rispondente al vero.

Intanto il metodo di Fubini, a differenza di quello di Severi, presuppone già acquisito il teorema di esistenza di Levi-Civita. Inoltre, quando, diversamente da come fa Fubini, si vanno a precisare i dettagli del suo ragionamento, ci si accorge che la sua dimostrazione, indubbiamente elegante, è, però, meno semplice di quanto non appaia dalla sua Nota.

Sia nella dimostrazione di Severi, che in quella di Fubini, del teor. II, interviene, in modo essenziale, il fondamentale teorema di Hartogs secondo il quale se Ω è un campo di R^4, K è un compatto contenuto in Ω, tale che $\Omega - K$ sia connesso, e se $W(z_1, z_2)$ è olomorfa nel campo $\Omega - K$, allora $W(z_1, z_2)$ può prolungarsi in una funzione olomorfa in tutto Ω.

Severi si adoperò per dare di questo teorema una dimostrazione autonoma rispetto a quella originale dello Hartogs [10], usando un procedimento di per se stesso interessante, specie per il teorema preliminare su cui esso si fonda. Severi

considera infatti un campo A nello spazio tridimensionale delle variabili reali x, y, t. Suppone che la frontiera σ di A sia una superficie semplice e chiusa analitica e che le sezioni di A con i piani $t =$ costante, se non vuote o riducentesi ad un punto, siano limitate da una curva regolare semplice e chiusa Γ_t. Sia H un compatto contenuto in A tale che $A - H$ sia connesso e sia $W(z, t)$ $(z = x + iy)$ una funzione che in $A - H$ sia funzione analitica delle tre variabili reali x, y, t ed, in più, sia funzione olomorfa di z, cioè soluzione in $A - H$ della equazione differenziale

$$(4) \qquad \frac{\partial W}{\partial \bar{z}} = 0.$$

Severi dimostra che la W può prolungarsi in tutto A in una funzione analitica di x, y, t verificante in A la (4). Questo risultato, enunciato in [5], trovasi dimostrato in [11]. Da esso, per dedurre il teorema di Hartogs, Severi considera l'intersezione del campo Ω dello spazio R^4 delle variabili x_1, y_1, x_2, y_2 con l'iperpiano $\Pi : y_1 = y_1^0$, essendo $z^0 \equiv (x_1^0, y_1^0, x_2^0, y_2^0)$ un punto di K. Tale intersezione sia il campo tri-dimensionale A. Sia $H = K \cap \Pi$. Se $W(z_1, z_2)$ è olomorfa in $\Omega - K$, la funzione $W(x_1 + iy_1^0, z_2)$ si può prolungare, per il risultato precedente, in una funzione $w(x_1, z_2)$ analitica rispetto a x_1, y_1, y_2 ed olomorfa rispetto a z_2, la quale, sostituendo x_1 con la variabile complessa z_1, coincide con $w(z_1, z_2)$ in un intorno 4-dimensionale di $A - H$ e, quindi, è il prolungamento di $W(z_1, z_2)$ in tutto uno strato attorno ad A. Data l'arbitrarietà di z^0, ne segue la dimostrazione del teorema di Hartogs.

Il ragionamento di Severi è indubbiamente elegante, anche se taluni dettagli di rigore andrebbero dovutamente precisati.

Il risultato preliminare di Severi venne esteso da Fubini [12] in un teorema più generale nel quale, alla ipotesi che W sia soluzione in $A - H$ della (4), sostituisce quella più generale secondo cui riesce

$$(5) \qquad \frac{\partial^2 W}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 W}{\partial y^2} = 0.$$

Inoltre Fubini suppone che A sia un campo compreso fra i due piani $z = 0$ e $z = k$ $(k > 0)$ e che σ non sia tutta la frontiera di A, ma solo quella parte di essa non contenuta nei detti due piani. Fubini suppone soltanto che $W(x, y, t)$ sia definita in uno strato attorno a σ, contenuto fra i due anzidetti piani e che ivi sia funzione analitica di x, y, t, verificante la (5). Da tale ipotesi deduce la prolungabilità di W in A in una funzione analitica w di x, y, t, verificante in A la (5).

Occorre dire che, mentre il risultato costituito dal teor. II ha avuto un notevole seguito nella teoria delle funzioni analitiche di più variabili complesse, le ricerche

di Severi e Fubini sul teorema di Hartogs sono rimaste praticamente isolate. Il motivo di ciò sta forse nel fatto che il «fenomeno di Hartogs», cioè la prolungabilità (univoca) della soluzione di un particolare sistema di equazioni lineari alle derivate parziali da uno strato attorno al contorno di un campo a tutto il campo, non risiede nelle circostanze analitiche messe in luce da Severi e da Fubini (prolungabilità di funzioni analitiche dipendenti da variabili alcune complesse ed alcune reali) ma in altre più profonde proprietà, scoperte molti anni dopo da Leon Ehrenpreis [13].

3. Estensione del teorema di Severi alle funzioni di n variabili complesse.

Il teor. II di Severi si estende facilmente a funzioni di n variabili complesse ($n > 1$). A tal fine si pensi Ω come un aperto limitato dello spazio R^{2n} omeomorfo ad un campo circolare a $2n$ dimensioni. La frontiera Σ di Ω sia una varietà regolare analitica chiusa a $2n - 1$ dimensioni, cioè il punto $z \equiv (z_1, \ldots, z_n)$ variabile su essa sia rappresentabile localmente con funzioni analitiche $z_k = z_k(t)(z_k = x_k + iy_k; k = 1, \ldots, n)$ del punto $t \equiv (t_1, \ldots, t_{2n-1})$ di R^{2n-1}. La matrice jacobiana

$$\frac{\partial(x_1, y_1, \ldots, x_n, y_n)}{\partial(t_1, \ldots, t_{2n-1})} \tag{6}$$

abbia sempre caratteristica $2n - 1$. Sia assegnata su Σ la funzione W, analitica rispetto alle variabili reali $t_1, \ldots, t_{2n-1}$ o, ciò che è lo stesso, traccia su Σ di una funzione analitica delle variabili reali $x_1, y_1, \ldots, x_n, y_n$, definita in uno strato attorno a Σ. In tali ipotesi il teorema di Severi si estende dicendo che esiste $w(z_1, \ldots, z_n)$, olomorfa in $\overline{\Omega}$ e tale che $w = W$ su Σ, se e solo se la matrice jacobiana

$$\frac{\partial(W, z_1, \ldots, z_n)}{\partial(t_1, \ldots, t_{2n-1})}$$

ha caratteristica minore di $n + 1$ in ogni punto di Σ.

Come nel caso $n = 2$, alla condizione ora enunciata può darsi forma intrinseca osservando che essa è perfettamente equivalente all'annullarsi su Σ della restrizione a Σ di una forma differenziale esterna di grado $n + 1$, precisamente:

$$\mathrm{d}W \wedge \mathrm{d}z_1 \wedge \ldots \wedge \mathrm{d}z_n = 0 \qquad \text{su } \Sigma. \tag{7}$$

La (7), considerata non su Σ, ma in un campo Ω, equivale al sussistere in Ω delle (1). Pertanto la necessità della (7) si prova immediatamente come nel caso $n = 2$.

Per provare la sufficienza possono estendersi, solo al prezzo di maggiori complicazioni formali, sia il metodo di dimostrazione di Severi, che quello di Fubini. Per usare, però, quest'ultimo procedimento, occorre considerare come già conseguito il teorema di Levi-Civita per le funzioni olomorfe di n variabili complesse.

Ricordiamo che Hörmander scrive la (7) sotto altra forma. Si ponga per ogni funzione scalare W delle $2n$ variabili reali $x_1, y_1, \dots, x_n, y_n$

$$\bar{\partial} W = \sum_{k=1}^{n} \frac{\partial W}{\partial \bar{z}_k} \, d\bar{z}_k$$

e si supponga poi che Σ sia il luogo dei punti per i quali

$$\rho(x_1, y_1, \dots, x_n, y_n) = 0, \tag{8}$$

essendo ρ tale che grad $\rho \neq 0$ su Σ.

Hörmander (cfr. [14], p. 31) in luogo della (7) considera l'equazione

$$\bar{\partial} W \wedge \bar{\partial} \rho = 0 \qquad \text{su } \Sigma. \tag{9}$$

E' facile dimostrare la perfetta equivalenza fra la (7) e la (9) considerate su Σ. Inoltre, come lo stesso Hörmander osserva, la (9) equivale al sussistere in ogni $z \in \Sigma$ delle equazioni

$$\sum_{k=1}^{n} \lambda_k \frac{\partial W}{\partial \bar{z}_k} = 0 \tag{10}$$

per ogni n-pla $\lambda_1, \dots, \lambda_n$ tale che per $z \in \Sigma$:

$$\sum_{k=1}^{n} \lambda_k \frac{\partial \rho}{\partial \bar{z}_k} = 0. \tag{11}$$

Egli osserva che (10), (11) involgono solo i valori di W su Σ e chiama queste equazioni: *equazioni tangenziali di Cauchy-Riemann*. Hörmander dà del teor. II di Severi una dimostrazione (per n arbitrario > 1) nella quale suppone Σ e W non analitiche, ma soltanto $\Sigma \in C^4$ e $W \in C^4(\bar{\Omega})$ (cfr. [14], p. 31). Nessun cenno è fatto in [14] dei lavori di Levi-Civita, Severi e Fubini. Hörmander attribuisce a Bochner [15] la priorità della dimostrazione del teor. II con Σ e W non analitiche (cfr. [14], p. 59). Analoga attribuzione fanno J. J. Kohn e H. Rossi [16] e Andreotti [17] (2).

---

(2) Occorre dire che in [18], Andreotti, supponendo $\Sigma \in C^\omega$, $W \in C^\omega$, attribuisce, giustamente, a Severi il teor. II.

Sia pure dopo un'attenta lettura della Memoria [15] di Bochner (dove non è fatto riferimento ai lavori di Severi e di Fubini), l'autore del presente scritto non è riuscito a trovare in essa alcuna indicazione di una dimostrazione o estensione del teor. II; non sembra neppure che il Bochner abbia pensato al problema della caratterizzazione della traccia *sulla frontiera di un campo* di una funzione analitica di più variabili complesse. Bochner si propone soltanto di dare, ed in effetti dà, una estensione del teorema di Hartogs per funzioni *verificanti in uno strato attorno a* Σ condizioni meno restrittive delle (1) (3). L'estensione del risultato di Severi, espresso dal teor. II, al caso di «dati» non analitici venne ottenuta per la prima volta nel 1957 nel lavoro [20] e, successivamente, nei lavori [21], [8] di Martinelli. Di ciò parleremo brevemente nel prossimo paragrafo.

4. Estensioni del teorema di Severi al caso in cui i «dati» Σ e W non sono analitici.

E' evidente che la condizione (3) o, più in generale, la (7), possono scriversi anche se Σ e W non sono, rispettivamente, una varietà analitica ed una funzione analitica su Σ. Sorge allora il problema, sollevato dallo stesso Severi, (cfr. [7], pp. 212 - 213) consistente nel vedere se, solo ammettendo su Σ e W ipotesi di differenziabilità tali da dare senso alla (7), non sèguiti a sussistere il teor. II. Risposta a tale quesito è stato dato nel 1957 nel lavoro [20]. La (7) può scriversi sotto forma generalizzata e, precisamente, l'equivalente *debole* della (7) è costituita dalle infinite equazioni integrali

$$\int_{\Sigma} [W \wedge d(\mu \wedge dz_1 \wedge \ldots \wedge dz_n)] = 0. \tag{12}$$

ove μ è la forma differenziale di grado $n - 2$ $(n > 1)$

$$\mu = \sum_{k=2}^{n} \sum_{h=1}^{k-1} f_{hk}(z)\, d\bar{z}_1 \ldots d\bar{z}_{h-1}\, d\bar{z}_{h+1} \ldots d\bar{z}_{k-1}\, d\bar{z}_{k+1} \ldots d\bar{z}_n. \tag{13}$$

$f_{hk}(z)$ indica un'arbitraria funzione scalare di $C^{\infty}(R^{2n})$. Se W è una funzione di $C^1(\Sigma)$ verificante le infinite equazioni (12), essa, come si vede con un'ovvia integrazione per parti, verifica la (7) e viceversa. Tuttavia non può affermarsi che se esiste W, non appartenente a $C^1(\Sigma)$, ma verificante le (12), tale W sia soluzione

(3) Che Bochner fosse solo interessato ad estendere il teorema di Hartogs e non quello di Severi (che, probabilmente, non gli era neppure noto) appare anche evidente dalla Nota [19].

in senso classico della (7). Si pone allora il più generale problema consistente nel vedere se, essendo la W *soluzione debole della (7)*, cioè soluzione delle infinite equazioni integrali (12), esiste una $w(z_1, \ldots, z_n)$ olomorfa nel campo Ω (avente Σ per frontiera) che ammette su Σ la W come traccia (in un senso da ben precisare). Il teorema dimostrato in [20] dà una risposta a questo più generale problema.

Si supponga che la frontiera Σ del campo limitato Ω di $R^{2n}(n > 1)$ sia un continuo e che $R^{2n} - \bar{\Omega}$ sia connesso. Σ sia tale che nell'intorno di ogni suo punto ammetta una rappresentazione parametrica locale: $x_k = x_k(t)$, $y_k = y_k(t)$ $(k = 1, \ldots, n)$ con funzioni di classse 1, dotate di derivate prime uniformemente hölderiane. La matrice jacobiana (6) abbia sempre caratteristica massima. Si dice allora che Σ è di classe C^{1+h}. La funzione W appartenga allo spazio $H_{1/2}(\Sigma)$, sia quindi la *traccia* su Σ di una funzione di $H_1(\Omega)$ (4), cioè di una funzione di $L^2(\Omega)$ che ha derivate prime (deboli) appartenenti ad $L^2(\Omega)$.

Il teorema dimostrato in [20] è il seguente.

III. *Nelle ipotesi ammesse per Σ e W, esiste una (ed una sola) $w(z_1, \ldots, z_n)$ appartenente ad $H_1(\Omega)$, olomorfa in Ω, ed avente come traccia su Σ [nel senso delle funzioni di $H_1(\Omega)$] la funzione W se e solo se la W verifica le infinite equazioni (12).*

E' opportuno aggiungere all'enunciato che se W, oltre ad appartenere ad $H_{1/2}(\Sigma)$, è continua su Σ, la $w(z_1, \ldots, z_n)$ è continua in $\bar{\Omega}$. Inoltre se $W \in C^1(\Sigma)$ [ciò che ovviamente implica $W \in H_{1/2}(\Sigma)$] la (6) è allora soddisfatta in senso classico.

Per la dimostrazione del teor. III rimandiamo a [20]. Vogliamo solo ricordare che essa, a differenza di quelle di Severi e di Fubini, non fa ricorso al teorema di Hartogs, che anzi si deduce, come è mostrato in [20], come immediato corollario del teor. III. Il teor. III può riguardarsi come un raffinamento del teorema di Hartogs, dato che, per il sussistere della tesi di questo teorema, basta che la condizione di olomorfia (7) sia verificata solo su Σ (e non in tutto un intorno di Σ) e sia verificata soltanto in senso debole.

All'estensione del teorema di Severi, nel caso di Σ e W non analitiche, è anche dedicato il lavoro [21] di Martinelli del 1961 (cfr. anche [8]). Martinelli suppone la W appartenente a $C^1(\Sigma)$ e quindi la (7) soddisfatta in senso classico, mentre invece suppone che Σ sia soltanto di classe C^1. La dimostrazione di Martinelli è particolarmente interessante anche perché, con qualche opportuna modifica, può essere impiegata per dimostrare che se è $W \in C^0(\Sigma)$ e verificante le (12) e

---

(4) Per la definizione di *traccia su Σ di una funzione di $H_1(\Omega)$* cfr. [22] pp. 24 - 25, oltre che il lavoro [20].

se $\Sigma \in C^{1+h}$, esiste una w olomorfa in Ω e continua in $\bar{\Omega}$ che coincide con W su Σ. Su ciò torneremo in altra sede. Vogliamo ora solo dire che il caso $W \in C^0(\Sigma)$ è stato considerato da Weinstock [23], il quale però assume su Σ un'ipotesi superflua, rimossa in un successivo lavoro [43].

Prima di chiudere questo paragrafo vogliamo ricordare una ricerca di L. Lamberti [24], che estende in varie direzioni i risultati del lavoro [20]. Lamberti suppone intanto che la frontiera Σ di Ω possa avere angolosità. Precisamente egli assume che il campo limitato Ω di R^{2n} sia *propriamente regolare* (cfr. [22] p. 21) e che la sua frontiera Σ sia composta di $(2n-1)$-celle di classe C^{1+h} a due a due aventi, al più, punti dei loro bordi in comune. Le ipotesi ammesse da Lamberti permettono a Σ di avere spigoli e vertici, ma non di tipo cuspidale.

Si assegni su Σ una funzione (a valori complessi) W, appartenente ad $H_{1-1/p}(\Sigma)$, $(p > 1)$, cioè una funzione che sia la traccia su Σ di qualche funzione appartenente ad $L^p(\Omega)$ ed avente derivate prime deboli appartenenti ad $L^p(\Omega)$. In brevi termini, W sia la traccia su Σ di una funzione di $H_1^p(\Omega)$ (nel senso opportuno da dare al termine «traccia»). Siano assegnate le funzioni $f_1, \ldots, f_n$ appartenenti ad $L^p(\Omega)$ e si consideri il problema

$$(14) \qquad \begin{cases} \bar{\partial} w = f_1\, d\bar{z}_1 + \ldots + f_n\, d\bar{z}_n & \text{in } \Omega, \\ w = W & \text{su } \Sigma. \end{cases}$$

Lamberti, generalizzando ampiamente il teor. III, dimostra che il problema (14) ammette una (ed una sola) soluzione appartenente ad $H_1^p(\Omega)$ se e solo se sono verificate le seguenti condizioni:

$$\int_{+\Sigma} [W \wedge d(\mu \wedge dz_1 \wedge \ldots \wedge dz_n)] =$$

$$= \sum_{h=1}^{n} \int_{\Omega} f_h\, d\bar{z}_h \wedge d(\mu \wedge dz_1 \wedge \ldots \wedge dz_n),$$

dove μ è una qualsiasi forma data da (13) e la faccia positiva di Σ è quella determinata dalla normale esterna.

5. Il problema locale di Hans Lewy.

Se Δ è una varietà 3-dimensionale regolare semplice, W una funzione definita su di essa, il problema locale di Cauchy per il sistema (1) consiste nel dimostrare che esiste una funzione olomorfa w in un campo contenente Δ la quale su Δ

coincide con W. Abbiamo visto che Severi nel 1931 aveva risoluto questo problema, come preliminare a quello «in grande» consistente nel determinare w in un campo Ω, nota la sua traccia su $\partial\Omega$. Severi aveva supposto Δ e W appartenenti a C^ω.

H. Lewy in [25] considera il problema di Cauchy senza fare l'ipotesi che Δ e W siano analitiche, ma solo supponendo che Δ sia di classe C^2 e W sia di classe $C^1(\Delta)$. Egli fa, riguardo al testè citato risultato locale di Severi, la sorprendente scoperta secondo cui (usiamo le sue stesse parole): «. . . *if the hypotheses concerning analiticity are dropped, the conclusion becomes faulty. Severi's result established, however, an interesting link between the theory of functions of two complex variables and the analytic solutions of (2)*». (Cfr. [25] p. 517).

Nel caso non analitico H. Lewy ottiene un risultato assai più sofisticato, rispetto a quello di Severi. Si supponga che Δ abbia equazione (8) (per $n = 2$), con ρ appartenente a C^2, verificante le ipotesi specificate al paragrafo 3. Sia Ω^+ (sia Ω^-) un campo la cui frontiera contenga Δ e tale che in esso sia sempre $\rho > 0$ ($\rho < 0$). Il teorema di H. Lewy è il seguente:

IV. *Se in ogni punto di Δ si ha $\mathscr{L}(\rho) < 0$ [$\mathscr{L}(\rho) > 0$], essendo $\mathscr{L}(\rho)$ l'invariante di E. E. Levi* (5), *se è $W \in C^1(\Delta)$ e verificante in Δ l'equazione di Severi (2), si può scegliere Ω^+ (Ω^-) in modo che in Ω^+ (in Ω^-) sia definita una funzione olomorfa, continua in $\Omega^+ \cup \Delta$ (in $\Omega^- \cup \Delta$) che su Δ coincide con W.*

La funzione olomorfa w^+ (la funzione olomorfa w^-), definita in Ω^+ (in Ω^-),

(5) L'invariante $\mathscr{L}(\rho)$, introdotto da E. E. Levi, si definisce al modo seguente:

$$\mathscr{L}(\rho) = \Delta_2'\rho\, \Delta_1''\rho + \Delta_2''\rho\, \Delta_1'\rho$$
$$-2\left\{\frac{\partial\rho}{\partial x_1}\frac{\partial\rho}{\partial x_2} + \frac{\partial\rho}{\partial y_1}\frac{\partial\rho}{\partial y_2}\right\}\left\{\frac{\partial^2\rho}{\partial x_1\,\partial x_2} + \frac{\partial^2\rho}{\partial y_1\,\partial y_2}\right\}$$
$$-2\left\{\frac{\partial\rho}{\partial x_1}\frac{\partial\rho}{\partial y_2} - \frac{\partial\rho}{\partial y_1}\frac{\partial\rho}{\partial x_2}\right\}\left\{\frac{\partial^2\rho}{\partial x_1\,\partial y_2} - \frac{\partial^2\rho}{\partial y_1\,\partial x_2}\right\}$$

con

$$\Delta_1'\rho = \left(\frac{\partial\rho}{\partial x_1}\right)^2 + \left(\frac{\partial\rho}{\partial y_1}\right)^2; \qquad \Delta_1''\rho = \left(\frac{\partial\rho}{\partial x_2}\right)^2 + \left(\frac{\partial\rho}{\partial y_2}\right)^2$$
$$\Delta_2'\rho = \frac{\partial^2\rho}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2\rho}{\partial y_1^2}; \qquad \Delta_2''\rho = \frac{\partial^2\rho}{\partial x_2^2} + \frac{\partial^2\rho}{\partial y_2^2}.$$

E. E. Levi mediante esso stabilì nel 1909 [26] quello che è uno dei risultati più belli e più profondi di tutta la teoria delle funzioni analitiche di due varabili complesse: *Se $\rho = 0$ è l'equazione della frontiera Σ del campo Ω di R^4, se è $\rho \in C^2$,* grad $\rho \neq 0$ *su Σ ed è $\rho > 0$ in Ω, condizione necessaria perché esista una $w(z_1, z_2)$ olomorfa in Ω e non prolungabile in una funzione olomorfa in un campo contenente propriamente Ω, è che riesca $\mathscr{L}(\rho) \leqslant 0$ in ogni punto di Σ.*

che coincide con W su Δ sarà chiamata il prolungamento olomorfo di W in Ω^+ (in Ω^-).

Il risultato testè enunciato di H. Lewy è assai sorprendente, perché in aperto contrasto con quanto avviene nel caso analitico ($\Sigma \in C^\omega$, $W \in C^\omega$) nel quale la W ha un prolungamento olomorfo sia in Ω^+ che in Ω^-. Nel caso non analitico, invece, se è $\mathscr{L}(\rho) < 0$ su Δ e quindi se esiste il prolungamento olomorfo di W in Ω^+, in generale non esiste il prolungamento olomorfo di W in Ω^-. Ciò può provarsi con esempi (cfr. [25], p. 521). Altro aspetto apparentemente paradossale del risultato di H. Lewy è il fatto che esso si presenta come in contrasto con il teor. III. Infatti, in virtù di questo teorema, basta che W, definita sulla frontiera Σ di Ω, verifichi l'equazione di Severi (2), perché essa ammetta un prolungamento olomorfo di tutto Ω, laddove, supponendo che Σ abbia equazione $\rho = 0$ e che sia in $\Omega : \rho > 0$, per assicurare la prolungabilità olomorfa di W, definita su un pezzo Δ di Σ, in un qualche campo contenuto in Ω e contiguo a Δ, non basta la sola (2), ma si richiede anche che sia $\mathscr{L}(\rho) < 0$ su Δ.

Evidentemente il contrasto è solo apparente: la condizione (2) *verificata su tutta* Σ è così fortemente restrittiva, da rendere possibile il prolungamento olomorfo di W in tutto Ω, senza ulteriori ipotesi aggiuntive. Invece, se la (2) è verificata *solo su* Δ, essa non basta, nel caso non analitico, per prolungare in modo olomorfo W in Ω^+ ed è richiesta l'ulteriore condizione $\mathscr{L}(\rho) < 0$ (6).

Il teorema IV si estende alle funzioni di n variabili complesse. L'enunciato rimane invariato. Solo la condizione $\mathscr{L}(\rho) < 0$ [$\mathscr{L}(\rho) > 0$] va sostituita con la

---

(6) Chi scrive ricorda una sua visita a Berkeley in California, al Collega ed Amico Hans Lewy, nel 1959. In quella circostanza comunicò a quell'eminente matematico il suo risultato costituito dal teor. III ed apprese da questi il teor. IV. Tuttavia ciascuno dei due, pur senza esplicitamente dichiararlo, rimase scettico circa il risultato dell'altro. Chi scrive pensava, infatti, fosse poco credibile che un problema, che per la sua risoluzione «in grande» richiedeva solo il sussistere della (2), avesse bisogno, per la sua risoluzione «in piccolo», di una condizione aggiuntiva (peraltro non richiesta nel caso analitico risoluto da Severi!). H. Lewy, invece, probabilmente pensava esser poco credibile che la risoluzione «in grande» di un problema potesse fare a meno di una condizione richiesta, invece, dal problema «in piccolo». In seguito, naturalmente, ciascuno dei due si rese ben conto del risultato dell'altro ed H. Lewy ebbe a scrivere al modo seguente: (cfr. [27], p. 174) «. . . *Here I wish to call attention to a related work by G. Fichera* [20]. *It concerns the solution w of Dirichlet's problem for a function w holomorphic in a bounded cell* Ω *of the space of complex* z_1, z_2, *to be determined from its boundary values on the smooth boundary* $\rho = 0$ *of* Ω. *Without requiring pseudoconvexity for* $\rho = 0$, *his results, expressed in the present context, proves that the necessary condition (2) for W on* $\rho = 0$ *implies existence in* Ω *of a holomorphic function* $w(z_1, z_2)$ *with the assigned boundary values on* $\rho = 0$.

The discrepancy between the two results is resolved when it is noted that Fichera's theorem states a global fact derived from global assumptions, while mine is a local statement based on local assumptions . . .».

seguente: *per ogni* $z \in \Delta$ *deve esserci almeno una n-pla di numeri complessi* $\lambda_1, \ldots, \lambda_n$ *tali che*

$$\sum_{k=1}^{n} \frac{\partial \rho}{\partial z_k} \lambda_k = 0 \tag{15}$$

$$\sum_{h,k}^{1,n} \frac{\partial^2 \rho}{\partial z_h \, \partial \bar{z}_k} \lambda_h \bar{\lambda}_k < 0 \qquad \left(\sum_{h,k}^{1,n} \frac{\partial^2 \rho}{\partial z_h \, \partial \bar{z}_k} \lambda_h \bar{\lambda}_k > 0 \right) \tag{16}$$

(cfr. [14] p. 51). La condizione ora enunciata si può anche esprimere dicendo che la forma hermitiana a primo membro della (16), ristretta alla varietà lineare (15), deve avere almeno un autovalore negativo (positivo).

6. La teoria di Andreotti.

I problemi finora considerati, iniziati da Severi e Fubini e proseguiti da altri autori, hanno ricevuto, recentemente, una collocazione entro un'assai più ampia teoria, dovuta ad Aldo Andreotti ed ai suoi collaboratori (7).

Una forma differenziale esterna w nelle $2n$ variabili reali può ovviamente rappresentarsi come una forma differenziale nelle *variabili olomorfe* $z_k = x_k + iy_k$ $(k = 1, \ldots, n)$ ed in quelle *antiolomorfe* $\bar{z}_k = x_k - iy_k$. Se w è di grado r rispetto alle variabili olomorfe e di grado s rispetto a quelle antiolomorfe, dicesi di tipo (r, s). Accanto all'operatorc di differenziazione esterna d si introducano gli operatori ∂ e $\bar{\partial}$, che, formalmente, sono identici all'operatore d, ma prendono solo in considerazione, rispettivamente, le variabili olomorfe e quelle antiolomorfe. Si ha $d = \partial + \bar{\partial}$, $\partial^2 = 0$, $\bar{\partial}^2 = 0$, $\partial\bar{\partial} + \bar{\partial}\partial = 0$. Si noti che per una forma del tipo $(0, 0)$ (cioè per una funzione scalare) l'equazione $\bar{\partial} w = 0$ equivale al sistema (1).

Andreotti considera forme del tipo $(0, s)$ e, proseguendo precedenti ricerche di Kohn e Rossi [16], studia per esse diversi problemi che nel caso degli scalari $(s = 0)$ hanno come caso particolare i problemi studiati da Severi, Fubini, H. Lewy ed altri. Uno di questi problemi è, ad esempio, il problema di Cauchy, consistente nel trovare una forma w del tipo $(0, s)$ verificante l'equazione $\bar{\partial} w = 0$, la quale su una varietà $(2n - 1)$-dimensionale Σ ha una «traccia» assegnata. E' questa una generalizzazione del problema di Cauchy studiato da Severi e H. Lewy. Se poi Σ è la frontiera di un campo Ω, se si richiede che la w verifichi l'equazione $\bar{\partial} w = 0$ in Ω e per essa sia assegnata la traccia su Σ, Andreotti ottiene un teorema che generalizza i teorr. II e III.

(7) Cfr. [28], [29], [30], [17], [18], [31].

Nel caso generale da lui studiato, la condizione (7) diventa:

$$(17) \qquad \bar{\partial}_{\Sigma} w = 0,$$

ove l'operatore $\bar{\partial}_{\Sigma}$ è la «restrizione» a Σ dell'operatore $\bar{\partial}$. La (17), nel caso degli scalari ($s = 0$), equivale alla (7) e per $n = 2$ si riduce all'equazione di Severi (2).

Le ulteriori condizioni che assegna Andreotti sono una generalizzazione di quelle richiamate alla fine del paragrafo precedente (estensione n-dimensionale del teorema di H. Lewy). Esse si esprimono mediante relazioni fra s, p (numero degli autovalori positivi della forma hermitiana a primo membro di (16), ristretta alla varietà (15)) e q (numero degli autovalori negativi). In tal modo Andreotti riesce a dare le condizioni necessarie e sufficienti perché i problemi considerati siano risolubili, oppure no. Egli considera anche problemi di integrazione che estendono alle forme di tipo $(0, s)$ il classico problema al contorno di Riemann-Hilbert per le funzioni sezionalmente olomorfe di una variabile complessa (cfr. [32], cap. V).

I procedimenti da lui impiegati si basano sui potenti metodi algebrici della co-omologia, che tuttavia, hanno forse lo svantaggio di dovere imporre alle varietà portanti i «dati» del problema di appartenere a classi C^{∞}.

Fra i problemi considerati da Andreotti vi è anche quello consistente nello studio dell'equazione

$$(18) \qquad \bar{\partial}_{\Sigma} w = f,$$

con f forma di tipo $(0, s + 1)$ assegnata su Σ. Anche per tale problema Andreotti dà le condizioni necessarie e sufficienti perché esso sia risolubile qualunque sia f, verificante le condizioni necessarie di compatibilità. Esse si esprimono in termini di relazioni fra s, p e q. Per $s = 0$, $n = 2$, il primo membro di (18) si riduce all'operatore differenziale lineare che interviene al primo membro dell'equazione di Severi (2). Se Σ è la varietà di R^4 di equazione

$$x_2 = x_1^2 + y_1^2,$$

allora dalla teoria di Andreotti segue che il problema (18) può non avere soluzione per ogni f. Ma in tal caso la (18) equivale all'equazione scalare

$$(19) \qquad \frac{1}{2}\left(\frac{\partial u}{\partial x_1} + i\,\frac{\partial u}{\partial y_1}\right) - i z_1 \frac{\partial u}{\partial x_2} = f(x_1, y_1, x_2),$$

che H. Lewy aveva studiato nel 1957 [33] e per la quale aveva dimostrato che, assegnata arbitrariamente una $f \in C^{\infty}$, può ben accadere che la (19) sia priva di qualsiasi soluzione. Andreotti in tal modo riesce a dare, nell'ambito della

sua teoria, una luminosa spiegazione del conturbante fenomeno scoperto da H. Lewy (8).

7. La caratterizzazione sulla frontiera di un campo della traccia di una funzione n-armonica. Problemi aperti.

Le ricerche di Severi, culminate nel teor. II, non sono fine a se stesse, ma preludono all'attacco di un ben più difficile problema: la caratterizzazione sulla frontiera Σ del campo Ω di R^4 della traccia della parte reale u di una funzione $w(z_1, z_2)$ olomorfa in Ω (9).

Se è $w = u + iv$, eliminando v dalle (1) (scritte per $n = 2$), si ottiene

$$\begin{cases} u_{x_1x_1} + u_{y_1y_1} = 0, & u_{x_2x_2} + u_{y_2y_2} = 0, \\ u_{x_1x_2} + u_{y_1y_2} = 0, & u_{x_1y_2} - u_{y_1x_2} = 0. \end{cases} \tag{20}$$

Avendo supposto Ω omeomorfo ad un campo sferico 4-dimensionale, le (20) caratterizzano una *funzione 2-armonica* (10), cioè la parte reale (o anche il coefficiente dell'immaginario) di una funzione olomorfa di due variabili complesse. E' evidente che non si può prescrivere ad arbitrio la traccia U di u su Σ, dato che U determina un'unica funzione armonica in Ω, che ammette U come traccia su Σ, ma questa funzione armonica in generale non sarà 2-armonica. Si tratta allora di determinare le condizioni necessarie e sufficienti cui deve soddisfare U perché essa sia la traccia di una funzione 2-armonica in Ω. Questo problema, supponendo $\Sigma \in C^\omega$, $U \in C^\omega$, venne completamente risoluto da Severi nel 1931 (cfr. [2], [3], [4], [5]).

Egli osserva che la sua equazione (2), posto $W = U + iV$, può scriversi

$$\Lambda_1 V = \Lambda_2 U, \qquad \Lambda_2 V = -\Lambda_1 U, \tag{21}$$

essendo Λ_1 e Λ_2 operatori differenziali lineari del I° ordine *reali*, definiti su Σ e

(8) Occorre dire che Hörmander [34], [35], nel 1960, usando altri procedimenti, era riuscito, estendendo il risultato di H. Lewy, ad indicare larghe classi di operatori differenziali lineari per i quali le corrispondenti equazioni possono essere sprovviste di soluzioni.

(9) Scriveva E. E. Levi, a conclusione del suo lavoro [26] (cfr. la Nota (5) del presente scritto): «. . . *Ove si interpretino i risultati degli studi precedenti come risultati relativi al sistema di equazioni alle derivate parziali cui soddisfa la parte reale di una funzione di due variabili complesse, si ottengono indicazioni non prive di valore. E' noto che, assegnare i valori di una tale funzione sopra l'ipersuperficie contorno del campo, è assegnare condizioni sovrabbondanti; quali siano le condizini cui devono soddisfare tali valori è un problema ancora assai oscuro, nonostante gli sforzi di parecchi studiosi*».

(10) Abbiamo preferito questo termine a quello di *funzione bi-armonica*, comunemente usato, dato che quest'ultima dizione viene anche impiegata per indicare le soluzioni dell'equazione $\Delta_2\Delta_2 u = 0$.

quindi esprimibili localmente per mezzo delle coordinate locali t_1, t_2, t_3. In virtù del teor. II le U cercate (cioè le tracce su Σ delle funzioni 2-armoniche) sono tutte e sole le U per le quali esiste, in corrispondenza, una V verificante le (21). A questo punto Severi applica, con destrezza, il classico *metodo di riduzione* basato sulle *parentesi di Poisson*. Dimostra intanto che i due operatori Λ_1 e Λ_2 non possono dare luogo ad un *sistema completo*. Infatti, se la loro parentesi di Poisson $\Lambda_3 \equiv (\Lambda_1, \Lambda_2) \equiv \Lambda_2 \Lambda_1 - \Lambda_1 \Lambda_2$ fosse identicamente su Σ eguale ad una combinazione lineare di Λ_1 e Λ_2, detta, come al solito, $\rho = 0$ l'equazione di Σ, dovrebbe essere $\mathscr{L}(\rho) \equiv 0$ su Σ. Ma questo comporterebbe per Σ di dover essere una varietà di livello di una funzione 2-armonica. Circostanza da escludersi, essendo Σ chiusa e limitata. Poiché Λ_1, Λ_2 e Λ_3 necessariamente devono dar luogo ad un sistema completo (le variabili indipendenti su Σ sono tre!) usando le parentesi di Poisson (Λ_1, Λ_3) e (Λ_2, Λ_3) si perviene ad equazioni dalle quali si riesce ad eliminare V e che costituiscono un sistema perfettamente equivalente al sistema (21). Esso è del tipo seguente:

$$K_1 U = 0, \qquad K_2 U = 0, \tag{22}$$

ove K_1 e K_2 sono due ben determinati operatori differenziali lineari del III ordine definiti su Σ. *Le (22) sono le ricercate condizioni necessarie e sufficienti per U.*

Occorre dire che le (22) erano già state, prima di Severi, scoperte da L. Amoroso [36], nel 1912, in un lavoro veramente pionieristico. Egli però perviene solo a dimostrare la necessità delle (22), non la sufficienza.

A questo punto si pone naturalmente il problema consistente nel caratterizzare U, abbandonando le ipotesi di analiticità per Σ e U, ammesse da Severi.

Lo scrivente, in un lavoro di prossima pubblicazione, è riuscito a risolvere questo problema, pervenendo ad un teorema dall'enunciato insperatamente semplice il quale, fra l'altro, pone bene in luce perché le condizioni su U intervengono solo per $n > 1$.

Si assumano su Ω e Σ le stesse ipotesi del teor. III. Sia $\nu \equiv (\alpha_1, \beta_1, \ldots, \alpha_n, \beta_n)$ il versore normale esterno a Σ e si consideri la direzione tangente a Σ determinata dal versore $\tau \equiv (\beta_1, -\alpha_1, \beta_2, -\alpha_2, \ldots, \beta_n, -\alpha_n)$ (11).

Diremo n-armonica la parte reale (o il coefficiente dell'immaginario) di una funzione olomorfa di n variabili complesse. Sia $U \in C^0(\Sigma)$. Sussiste il seguente teorema:

V. *Condizione necessaria e sufficiente perché U sia la traccia su Σ di una funzione, n-armonica in Ω e continua in $\bar{\Omega}$, è che per ogni coppia di funzioni A e B,*

(11) Tale versore è stato impiegato, per $n = 2$, da Martinelli in [37] e per n qualsiasi da Rizza in [38].

armoniche in Ω, di classe $C^1(\bar{\Omega})$ e verificanti la condizione al contorno su Σ

$$\frac{\partial A}{\partial \tau} + \frac{\partial B}{\partial \nu} = 0, \tag{23}$$

si abbia

$$\int_\Sigma U\left(\frac{\partial A}{\partial \nu} - \frac{\partial B}{\partial \tau}\right) d\Sigma = 0. \tag{24}$$

Le (24) costituiscono l'equivalente «debole» delle (22). Per $n = 1$ la condizione (23) implica: $\partial A/\partial \nu - \partial B/\partial \tau \equiv 0$ su Σ e quindi le condizioni (24) scompaiono.

Con metodo analogo può caratterizzarsi la *derivata normale* su Σ di una funzione n-armonica (problema di Neumann per le funzioni n-armoniche).

VI. *La funzione φ uniformemente hölderiana su Σ è la derivata normale su Σ di una funzione, n-armonica in Ω e di classe $C^1(\bar{\Omega})$, se e solo se, per ogni terna di funzioni A, B, C, armoniche in Ω e di classe $C^1(\bar{\Omega})$, verificanti le condizioni al contorno su Σ*

$$\frac{\partial A}{\partial \tau} + \frac{\partial B}{\partial \nu} = 0, \qquad \frac{\partial A}{\partial \nu} - \frac{\partial C}{\partial \tau} = 0,$$

si ha

$$\int_\Sigma \varphi(B - C)\, d\Sigma = 0. \tag{25}$$

E' facile vedere che per $n = 1$ le (25) si riducono alla ben nota condizione

$$\int_\Sigma \varphi\, d\Sigma = 0.$$

Le dimostrazioni dei teorr. V e VI verranno pubblicate in altra sede.

Abbiamo finora parlato di problemi già risoluti, sostanzialmente sorti dalle ricerche iniziali di Severi, prima, e di Fubini, poi. Molti, tuttavia, sono i problemi che attendono ancora soluzione.

Analogamente a quanto avviene nel caso $n = 1$, ci si può chiedere che cosa succede se i «valori al contorno» di una funzione olomorfa sono rappresentati non da una funzione di punto, ma da una misura. Precisiamo il problema. Le condizioni (12) possono, in forma equivalente, scriversi, com'è dimostrato in [20], al modo seguente:

(26) $$\sum_{k=1}^{n} \int_{\Sigma} \varphi_k(\alpha_k + i\beta_k)\, W \,\mathrm{d}\Sigma = 0,$$

essendo $\varphi_1, \ldots, \varphi_n$ arbitrari polinomi nelle variabili $z_1, \ldots, z_n, \bar{z}_1, \ldots, \bar{z}_n$, tali che

(27) $$\sum_{k=1}^{n} \frac{\partial \varphi_k}{\partial \bar{z}_k} = 0$$ (12).

Supponiamo che le (26) siano soddisfatte da una misura; sia cioè

(28) $$\sum_{k=1}^{n} \int_{\Sigma} \varphi_k(\alpha_k + i\beta_k)\, \mathrm{d}\mu = 0,$$

essendo μ una misura complessa definita nel σ-anello dei boreliani di Σ e verificando le φ_k la (27). Sussiste, per $n > 1$, l'analogo del celebre teorema dei fratelli Riesz [39], secondo cui le (28) implicano, per $n = 1$, l'assoluta continuità di μ? (13)

Cosa avviene se i «valori al contorno» di una funzione n-armonica, o della sua derivata normale, sono rappresentati da una misura reale μ? (14) In questo caso, per $n = 1$, non accade che μ debba essere assolutamente continua.

Altri problemi da studiare consistono nell'analisi dei problemi locali (tipo Hans Lewy) per una funzione 2-armonica o, in generale, n-armonica. E' evidente, dall'analisi di Severi, che nel caso analitico ($\Delta \in C^{\omega}$, $U \in C^{\omega}$) le (22) sono necessarie e sufficienti, purché su Δ sia $\mathscr{L}(\rho) \neq 0$. Cosa può dirsi se Δ ed U non sono analitiche?

Inoltre, i problemi, considerati in questo paragrafo, come si pongono nell'ambito della teoria generale di Andreotti?

---

(12) Le (26) hanno, anzi, rispetto alle (12), il vantaggio di assumere significato anche per $n = 1$, nel qual caso si riducono alle ben note condizioni

$$\int_{+\Sigma} z^h\, W(z)\, \mathrm{d}z = 0 \qquad (h = 0, 1, 2, \ldots)$$

che caratterizzano la traccia su Σ di una funzione olomorfa in Ω.

(13) Il teorema dei fratelli Riesz è stato esteso al caso $n > 1$ da Bochner [40] e da altri [41], [42] secondo un indirizzo diverso da quello da noi prospettato.

(14) Con ciò s'intende che nelle (24), o nelle (25), $U\,\mathrm{d}\Sigma$, oppure $\varphi\,\mathrm{d}\Sigma$, vengono sostituite da $\mathrm{d}\mu$ (μ misura reale).

Abbiamo accennato a questi problemi, a nostro avviso di grande interesse, per sottolineare come le teorie dei problemi al contorno per le funzioni analitiche di più variabili complesse, iniziate mezzo secolo fa da Severi, poi subito seguito da Fubini, cioè dai due Matematici onorati in questo Convegno, abbiano oggi un interesse pulsante e vitale.

BIBLIOGRAFIA.

[1] LEVI-CIVITA T., *Sulle funzioni di due o più variabili complesse*, Rend. Acc. dei Lincei XIV, 1905; 492 - 499.

[2] SEVERI F., *Il problema di Dirichlet per le funzioni biarmoniche*, Mem. Reale Acc. d'Italia, II, parte 1ª, 1931; 7 - 29.

[3] SEVERI F., *Contributi alla teoria delle funzioni biarmoniche*, Mem. Reale Acc. d'Italia, II, parte 1ª, 1931; 357 - 411.

[4] SEVERI F., *Les fonctions biharmoniques et la thèorie des fonctions analytiques de deux variables complexes*, C.R. Acad. Sc. Paris, 192, 1931; 1514 - 1517.

[5] SEVERI F., *Risoluzione generale del problema di Dirichlet per le funzioni biarmoniche*, Rend. Acc. Lincei, XIII, 1931; 795 - 804.

[6] SEVERI F., *Risultati, vedute e problemi nella teoria delle funzioni analitiche di due variabili complesse*, Rend. del Sem. Matem. della Fac. di Sci. Univ. Roma, Anno Acc. 1930 - 1931, p. II, Memorie; 1 - 58.

[7] SEVERI F., *Lezioni sulle funzioni analitiche di più variabili complesse*, tenute nel 1956 - - 57 all'Ist. Naz. di Alta Matem. CEDAM, Padova, 1957.

[8] MARTINELLI E., *Sopra un teorema di F. Severi nella teoria delle funzioni analitiche di più variabili complesse*, Rend. di Matem. XX, 1961; 81 - 96.

[9] FUBINI G., *Su un teorema del Severi per le funzioni analitiche di due variabili*, Rend. Acc. Lincei, XIV, 1931; 453 - 455.

[10] HARTOGS F., *Einige Folgerungen aus der Cauchyschen Integralformel bei Funktionen mehrerer Veränderlichen*, Münch. Sitzungsber. XXXVI, 1906; 223 - 241.

[11] SEVERI F., *Una proprietà fondamentale dei campi di olomorfismo di una funzione analitica di una variabile reale e di una variabile complessa*, Rend. Acc. Lincei, XXV, 1932; 487 - 490.

[12] FUBINI G., *Un teorema sulle equazioni alle derivate parziali di tipo ellittico che generalizza un teorema dell'Hartogs ed uno del Severi*, Rend. Acc. Lincei, XXV, 1932; 499 - - 501.

[13] EHRENPREIS L., *A new proof and an extension of Hartogs theorem*, Bull. Amer. Math. Soc. LXVII, 1961; 507 - 509.

[14] HÖRMANDER L., *An Introduction to Complex Analysis in Several Variables*, D. Van Nostrand Co. Inc. Princeton, Toronto, London, 1966.

[15] BOCHNER S., *Analytic and Meromorphic Continuation by means of Green's Formula*, Ann. of Mathem. XLIV, 1943; 652 - 673.

[16] KOHN J. J.-ROSSI H., *On the Extension of Holomorphic Functions from the Boundary of a Complex Manifold*, Ann. of Mathem. LXXXI, 1965; 451 - 472.

[17] ANDREOTTI A., *Lewy Problem for Cauchy-Riemann Equations*, Contributi del Centro Linceo Interdisciplinare di Scienze Matematiche e loro Applicazioni, n. 18. Acc. dei Lincei, 1976.

[18] ANDREOTTI A., *Lewy Problem for Cauchy-Riemann Equations*, Problemi attuali e di cultura, quaderno n. 217. Convegno internazionale sul tema: Metodi valutativi nella

Fisica-Matematica (Roma, 15 - 19 dic. 1972) Acc. dei Lincei, 1975.
[19] BOCHNER S., *Partial Differential Equations and Analytic Continuation*, Proc. Nat. Acad. Sci. XXXVIII, 1952; 227 - 230.
[20] FICHERA G., *Caratterizzazione della traccia, sulla frontiera di un campo, di una funzione analitica di più variabili complesse*, Rend. Acc. Lincei, XXII, 1957; 706 - 715.
[21] MARTINELLI E., *Sulla determinazione di una funzione analitica di più variabili complesse in un campo, assegnatane la traccia sulla frontiera*, Ann. di Matem. pura ed appl., LV, 1961; 191 - 202.
[22] FICHERA G., *Linear elliptic differential systems and eigenvalue problems*, Lecture Notes in Mathem. n. 8, 1965, Springer Verlag.
[23] WEINSTOCK B. M., *Continuous Boundary Values of Analytic Functions of Several Complex Variables*, Proc. Amer. Math. Soc. XXI, 1969; 463 - 466.
[24] LAMBERTI L., *Sul sistema di equazioni alle derivate parziali di Wirtinger*, Rend. di Matem. XXIII, 1964; 419 - 437.
[25] LEWY H., *On the local character of the solutions of an atypical linear differential equation in three variables and a related theorem for regular functions of two complex variables*, Ann. of Mathem. LXIV, 1956; 514 - 522.
[26] LEVI E. E., *Studi sui punti singolari essenziali delle funzioni analitiche di due o più variabili complesse*, Ann. di Matem. pura e appl. XVII, 1910; 61 - 88.
[27] LEWY H., *Atypical partial differential equations*, Partial Diff. Equations and Continuum Mechanics, Proc. of an Int. Conf. Madison (1960) edited by R. E. Langer, Madison, The Univ. of Wisconsin Press, 1961; 171 - 175.
[28] ANDREOTTI A., *E. E. Levi convexity and H. Lewy problem*, Actes Congrès Int. Mathém. Nice 1970, II, Gauthier-Villars, Paris 1971; 607 - 611.
[29] ANDREOTTI A.-HILL C. D., *E. E. Levi convexity and the Hans Lewy problem*, Part I: *Reduction to vanishing theorems*, Ann. Sc. Norm. Sup. Pisa, XXVI, 1971; 325 - - 363.
[30] ANDREOTTI A.-HILL C. D., *E. E. Levi convexity and the Hans Lewy problem*, Part II: *Vanishing theorems*, Ann. Sc. Norm. Sup. Pisa, XXVI, 1971; 747 - 806.
[31] ANDREOTTI A.-VESENTINI E., *Carleman estimates for the Laplace-Beltrami equation on complex manifolds*, Pub. I.H.E.S. n. 25, 1965; 81 - 130.
[32] MUSKHELISHVILI N. I., *Singular Integral Equations*, II ed., Noordhoff, 1953.
[33] LEWY H., *An example of a smooth linear partial differential equation without solutions*, Ann. of Mathem. LXVI, 1957; 155 - 158.
[34] HÖRMANDER L., *Differential equations without solutions*, Mathem. Ann. CXL, 1960; 169 - 173.
[35] HÖRMANDER L., *On existence of solutions of partial differential equations*, Partial Diff. Equations and Continuum Mechanics, Proc. of an Intern. Conf. Madison, 1960, edited by R. E. Langer, Madison, The Univ. of Wisconsin Press, 1961; 233 - 239.
[36] AMOROSO L., *Sopra un problema al contorno*, Rend. Circ. Matem. Palermo, XXXIII, 1912; 75 - 85.
[37] MARTINELLI E., *Studio di alcune questioni della teoria delle funzioni biarmoniche e delle funzioni analitiche di due variabili complesse coll'ausilio del calcolo differenziale assoluto*, Mem. Reale Acc. d'Italia, XII, parte 1ª, 1942; 143 - 167.
[38] RIZZA G. B., *Su diverse estensioni dell'invariante di E. E. Levi nella teoria delle funzioni di più variabili complesse*, Ann. di Matem. pura e appl. XLIV, 1957; 73 - 89.
[39] RIESZ F.e M., *Ueber die Randwerte einer analytischer Funktion*, IV Scand. Math. Congr. Stockholm, 1916; 27 - 44.
[40] BOCHNER S., *Boundary values of analytic functions in several variables and of almost periodic functions*, Ann. of Mathem. XLV, 1944; 708 - 722.

[41] WIENER N.-MASANI P., *The prediction theory of multivariate stochastic processes*, II, Acta Mathem. XCIX, 1958; 93 - 137.

[42] HELSON H.-LOWDENSLAGER D., *Prediction theory and Fourier series in several variables*, Acta Mathem. XCIX, 1958; 165 - 202.

[43] WEINSTOCK B. M., *An Approximation Theorem for $\bar{\partial}$-Closed Forms of Type* $(n, n-1)$, Proc. Amer. Math. Soc. 26, 1970; 625 - 628.

TULLIO VIOLA

IL CONTRIBUTO DI GUIDO FUBINI NELL'APPROFONDIMENTO DEL CONCETTO DI INTEGRALE

1. Della multiforme e geniale attività scientifica di Guido Fubini, la parte che mi sono assunto il compito di riassumere si colloca in alcune note – cinque, per l'esattezza – a prescindere da un brillante capitolo delle Sue *Lezioni di Analisi Matematica* tenute al Politecnico di Torino (1). Ecco i titoli delle cinque note:

[1] «*Sugli integrali multipli*» (Rendic. Lincei, s. V, vol. 16_1, 1907).

[2] «*Sugli integrali doppi*» (Rendic. Lincei, s. V, vol. 22_1, 1913).

[3] «*Su un teorema relativo agli integrali doppi*» (Rendic. Lincei, s. V, vol. 22_2, 1913).

[4] «*Sulla derivata seconda mista di un integrale doppio*» (Rendic. Circ. Palermo, vol. 40, 1915; in collaborazione con L. Tonelli).

[5] «*Il teorema di riduzione per gli integrali doppi*» (Rendic. Semin. Mat. Torino, vol. 9, 1949).

Il compianto prof. Beniamino Segre, nella commemorazione di Guido Fubini tenuta all'Accademia dei Lincei nel 1954 (commemorazione riprodotta come introduzione alle *Opere scelte* del grande analista, pubblicate a cura dell'Unione Matematica Italiana), afferma che «*Fubini non apprezzava eccessivamente questi Suoi lavori. Egli si limitava a considerarli come cosette graziose, ed era stupito nel constatare che il Suo nome all'estero (anziché ai vari profondi risultati da Lui conseguiti in altri campi) veniva per lo più associato al teorema che assegna le condizioni più generali sotto cui un integrale superficiale può venir ottenuto con una doppia integrazione lineare*».

E' certamente vero, come ancora afferma Segre, che «*le ricerche a cui Fubini giustamente teneva di più, ed in cui Egli ha maggiormente dimostrato la Sua forza creatrice, sono quelle di geometria proiettivo-differenziale (. . .). Ricerche che costituiscono un complesso imponente e multiforme*» e che hanno avuto

---

(1) Tali *Lezioni* sono oggetto di esposizione, da parte di un illustre collega, altrove in questo libro. Il capitolo citato è il XVI (*Funzioni additive generali e integrali multipli*), con alcuni sviluppi nel capitolo successivo.

profonde e vaste ripercussioni in molti campi. Mi sembra tuttavia che le cinque note citate non siano meno significative, nella loro incisività, né meno ricche delle straordinarie e geniali capacità creative di Guido Fubini. Lo stesso Segre chiama alcune delle cinque note, oltre ad altre di *Analisi pura* (2), dei «*veri gioielli*».

Ma direi di più: dal punto di vista della storia della matematica moderna, desta un certo stupore il non pieno autoriconoscimento che lo stesso Fubini ebbe dell'importanza di questo settore della propria produzione. Il fatto si generalizza, per ragioni non ancora chiarite (e certamente non facili da chiarirsi), a molti analisti italiani dell'epoca, i quali non posero al centro dei propri interessi scientifici l'elaborazione e l'approfondimento dei nuovi concetti sull'integrazione, pur dopo aver portato all'argomento alcuni contributi essenziali. Questo problema storico trova, del resto, un certo riscontro in campo internazionale, persino nella Francia che fu la patria d'origine dei detti concetti (3).

2. E' noto che, negli ultimi decenni del sec. XIX, l'utilizzazione dell'integrale di Riemann si era gradualmente rivelata come insufficiente ad affrontare i problemi più avanzati e più profondi dell'Analisi. Le ragioni di tale insufficienza si riducevano, in grandi linee, a tre:

1ª) Il fatto che, se una funzione $f(x)$ è integrabile secondo Riemann in un intervallo (a, b) dell'asse reale, non sempre la funzione integrale

$$F(x) = \int_a^x f(\xi)\, d\xi$$

è ivi derivabile in ogni punto. D'altra parte si erano incontrati degli esempi di funzioni $F(x)$ ovunque derivabili in (a, b), ma la cui derivata $F'(x)$ non risultava integrabile, secondo Riemann, in (a, b).

Si era così scoperto che il legame tradizionale fra «funzioni primitive» e «funzioni integrali», così felicemente espresso dal teorema d'inversione (4), poteva, in casi sia pure particolari ma non per questo di scarsa importanza, risultare infranto: il problema della «*ricerca delle funzioni primitive*» appariva ancora

(2) Per le quali rimandiamo alle esposizioni dei professori ALDO GHIZZETTI e GAETANO FICHERA in questo libro.

(3) Accenneremo in appresso a taluni di questi fatti, nei rapporti fra analisiti francesi e italiani, fatti che non possono certo ridursi a semplice cronaca curiosa.

(4). Teorema a cui, nei nostri corsi universitari, si è soliti associare i due nomi di E. TORRICELLI e di I. BARROW. Tale uso, accettabile e forse anche utile sotto il profilo didattico, appare improprio dal punto di vista storico.

lontano dalla sua risoluzione.

2ª) L'applicabilità limitata del teorema sull'integrabilità, termine a temine, di una serie di funzioni. Si era scoperto infatti che la somma $f(x)$ di una serie convergente

$$\sum_{n=1}^{\infty} f_n(x)$$

di funzioni integrabili, tutte definite in uno stesso intervallo (a, b), anche se ivi ugualmente limitate e persino se ivi tutte continue, tale somma – dico – può non essere integrabile in (a, b) secondo Riemann.

3ª) Infine l'applicabilità limitata della formula classica, detta di riduzione di un integrale di campo a più integrazioni (lineari o rettilinee) successive. Se, per fare il caso più semplice, la funzione $f(x, y)$ di due variabili è integrabile secondo Riemann nell'intervallo bidimensionale $I \equiv (a, b) \times (c, d)$ del piano (x, y), può accadere che la formula di decomposizione

$$\int_I f(x, y)\, \mathrm{d}\sigma = \int_a^b \mathrm{d}x \int_c^d f(x, y)\, \mathrm{d}y$$

non abbia neppure significato, perché l'uno o l'altro dei due integrali semplici del secondo membro non possa essere definito come integrale nel senso di Riemann.

Orbene avvenne che, con la grande scoperta di Lebesgue (1902), cioè con la nuova definizione dell'integrale da lui trovata, tutte e tre le ragioni d'insufficienza, or ora accennate, furono gradualmente e brillantemente superate. Lebesgue stesso superò rapidamente la seconda ragione, e superò anche la prima limitatamente alle funzioni integrande $f(x)$ limitate nell'intervallo d'integrazione (5).

Quanto alla terza ragione d'insufficienza, essa fu superata precisamente da Fubini con la nota [1], nota sulla quale intendo, fra poco, trattenermi quanto essa ben merita.

3. E' accaduto più volte, nella storia della scienza, che scoperte di contenuto altamente e profondamente teorico, tardarono ad esser capite e seguite. Non si può veramente dire che questo sia stato il caso della scoperta del nuovo integrale. E tuttavia, allorché uscì la famosa *Tesi* di Lebesgue, anzi già quando se ne ebbero

---

(5) A. DENJOY superò totalmente la prima limitazione circa dieci anni più tardi (1911 - 12), con una geniale generalizzazione della stessa definizione dell'integrale di LEBESGUE.

le prime anticipazioni, anche grandi e grandissimi analisti non si resero subito conto di quanto era accaduto. Il fatto appare tanto più singolare, se si pensa che la ricerca di una nuova, idonea definizione dell'integrale era, già da vari anni, sul tappeto. A tale ricerca si erano già dedicati E. Borel, W. H. Young ed altri, con fatica e conseguendo notevoli ma complicati risultati parziali. Anche Giuseppe Vitali non si trovava lontano dalla scoperta.

Eppure (racconta Fubini nella conferenza [5], che venne pubblicata postuma e fu probabilmente l'ultimo Suo scritto scientifico, conferenza nella quale Egli volle ritornare un'ultima volta sull'argomento di cui si era occupato in gioventù) *«i lavori di Lebesgue non erano considerati molto importanti da tutti i matematici; a molti pareva che Lebesgue studiasse soltanto le inutili funzioni "patologiche"* (6) (. . .). *Quando Lebesgue scrisse la sua "Tesi", Picard si rivolse al Dini, allora direttore degli "Annali di Matematica", dicendogli che aveva una buona tesi di uno dei suoi allievi, che questa tesi studiava i fondamenti del calcolo, che tali fondamenti erano studiati principalmente in Italia, e che perciò sarebbe stato meglio che la tesi fosse pubblicata negli "Annali"»*. Fubini venne a conoscenza di questa lettera, *«e subito pensò che Picard non apprezzasse molto questo genere di ricerche. Neppure il Dini era convinto dell'importanza della "Tesi" di Lebesgue; ma, per aderire al desiderio di Picard, pubblicò il lavoro negli "Annali". In tal modo il primo lavoro sul nuovo Calcolo fu pubblicato in un periodico italiano, il cui direttore non credeva i nuovi metodi importanti per lo sviluppo della scienza»*.

Per la storia, Fubini aggiunge che *«il Dini mutò opinione nei suoi ultimi anni. Questo cambiamento* (afferma sempre Fubini) *si deve alla definizione degl'integrali di Lebesgue data da Perron, definizione molto importante perché non esige la nozione, nuova, della misura di un insieme, ma si fonda soltanto sulle definizioni più classiche. Per comprendere la "forma mentis" di quei tempi ormai lontani»*, Fubini riferisce anche che, *«quando disse ad un altro grande matematico italiano, il Bianchi, che l'insieme dei numeri razionali ha misura nulla, egli gli rispose canzonandolo e dicendo che Fubini studiava solo i paradossi dell'infinito»*.

---

(6) FUBINI aggiunge: *«Il termine "patologiche" non è mio, ma, se ben ricordo, di KLEIN»*. Il termine si trova anche in scritti di POINCARÉ.

Come si vede, fra matematici italiani, francesi ed anche tedeschi, in un colloquio fatto di mutue azioni e reazioni, vi furono perplessità ed incertezze, che durarono poi effettivamente vari anni. A ciò ho già accennato sopra (fine del n. 1). Voglio soltanto dire che nessun analista italiano (parlo dei più grandi, naturalmente), né in quegli anni né dopo, si concentrò sulla teoria dell'integrale di LEBESGUE in quanto tale. Lo stesso TONELLI, che pure portò contributi di prim'ordine su taluni aspetti dell'integrale, ne trattò poi prevalentemente sotto il profilo metodologico e come strumento per le sue ricerche sul calcolo delle variazioni, sulla teoria delle serie trigonometriche ed altre applicazioni.

4. Sempre nella citata conferenza [5], Fubini descrive, in modo molto riassuntivo, l'iter scientifico che lo portò ad interessarsi del problema della decomposizione degli integrali superficiali.

Già da vari anni Egli studiava il celebre problema di Dirichlet (strettamente collegato, da Riemann in poi, a quello della minimizzazione del funzionale

$$J(u) = \int_\Gamma \left\{ \left(\frac{\delta u}{\delta x} \right)^2 + \left(\frac{\delta u}{\delta y} \right)^2 \right\} d\sigma,$$

con assegnati valori, per la funzione incognita u, al contorno del campo Γ) e l'analogo problema di Plateau (della minimizzazione del funzionale

$$J^*(u) = \int_\Gamma \sqrt{1 + \left(\frac{\delta u}{\delta x} \right)^2 + \left(\frac{\delta u}{\delta y} \right)^2}\, d\sigma),$$

incontrando difficoltà di dettaglio che lo portavano appunto alla necessità di disporre della formula di decomposizione. A tali problemi si dedicavano, a quell'epoca, molti analisti anche sommi, problemi che ricevettero poi una sistemazione soddisfacente, appunto con l'uso degl'integrali di Lebesgue.

Quando apparve la nuova definizione dell'integrale, Fubini era dunque già preparato ad accoglierla e ad approfondirla, come altri analisti italiani: Vitali e Tonelli già nominati (7), e Beppo Levi. Quest'ultimo doveva, anche lui, rendersi noto per una profonda e ardua ricerca sul principio di Dirichlet (Rendic. Circ. Palermo, vol. 22, 1906).

Il livello più avanzato, raggiunto alla vigilia della scoperta di Lebesgue, sulla validità della formula di decomposizione, era quello del teor. di A. Pringhsheim (8),

---

(7) Il secondo, ancora giovanissimo, avrebbe portato i suoi ben noti contributi, sull'argomento, alcuni anni più tardi.

(8) Tale teorema si enuncia:
«Se esistono entrambi gli integrali

$$\int_a^b f(x,y), dx, \qquad \int_c^d f(x,y)\, dy,$$

oltre all'integrale superficiale

$$\int_I f(x,y)\, d\sigma,$$

allora vale la formula:

al quale sia B. Levi che lo stesso Fubini avrebbero fatto ricorso.

5. La dimostrazione, data da Fubini, del suo teorema di decomposizione, è un pezzo di tale bravura e di tale perfezione, che credo interessante ora riportarla. Né mi sento di aderire all'opinione espressa dall'autore nella suddetta conferenza:

«*Credo meglio non dare qui una dimostrazione completa; sarò meno noioso se mi limiterò ad accennare alle dimostrazioni più importanti, e parlerò dei problemi e dei metodi che, per la prima volta, hanno condotto al teorema*».

Codesta mi sembra un'opinione di evidente modestia che, come tale, appartiene all'autore e a lui solo. Per parte mia, posso dire che, per quanto io abbia preso conoscenza di altre dimostrazioni, anche moderne, del teor. di Fubini, nessuna di queste raggiunge la completezza, né la chiarezza, e neppure la semplicità di quella originaria. La quale, in certe sue premesse, richiama quello e solo quello che dei risultati contenuti nella tesi di Lebesgue occorre conoscere, e contiene un vero e proprio lemma che è molto facile scorporare.

Le dimostrazioni che sono state date in seguito da altri autori, anche se interessanti sotto il profilo metodologico, hanno il difetto di assorbire il lemma in profondità, a un livello poco riconoscibile, oppure (al contrario) di scaricare varie questioni di dettaglio, per altro importanti, su una serie di proposizioni precedenti. Anche sulle generalizzazioni ottenute per gl'integrali secondo Lebesgue-Stielties, può farsi una critica analoga.

Nella dimostrazione che ora darò, seguirò dunque fedelmente l'esposizione originaria di Fubini, conservandone anche, con alcuni ritocchi, sia la terminologia che le notazioni. Mi permetterò invece di abbondare in spiegazioni di dettaglio, nella speranza di far cosa gradita a una più vasta cerchia di lettori, soprattutto ai giovani che muovono i primi passi nelle ricerche di analisi matematica.

6. *Enunciato del teor. di Fubini* (v. [1] p. 608):

«*Se $f(x, y)$ è una funzione di due variabili x, y, limitata o illimitata, sommabile in un insieme misurabile Γ del piano xy, allora si ha sempre*:

$$\int_I f(x,y)\,d\sigma = \int_a^b dx \int_c^d f(x,y)\,dy».$$

(Münchener Berichte, 1898). Ovviamente le tre integrazioni sono qui da intendersi nel senso di Riemann. Uno studio preliminare approfondito della questione, nell'ambito dell'integrazione secondo Riemann, si trova in: C. JORDAN, «Cours d'Analyse» (Ediz. 1894) p. 88.

$$\int_\Gamma f(x,y)\,d\sigma = \int dy \int f(x,y)\,dx = \int dx \int f(x,y)\,dy\text{» (9).}$$

Dimostrazione. Ragioniamo facendo due ipotesi essenzialmente diverse.

I Ipotesi: Γ *sia anche linearmente misurabile* (10). Premettiamo allora il

LEMMA. «*Se* $f(x,y)$ *è una funzione misurabile superficialmente in* Γ, *esiste una funzione* $\varphi(x,y)$ ***misurabile sia superficialmente che linearmente*** *in* Γ (11), *tale che l'insieme dei punti di* Γ *nei quali è* $f \neq \varphi$, ***risulti contenuto in un insieme*** E *anch'esso (come* Γ*) misurabile tanto superficialmente quanto linearmente, con le proprietà:*

1) E *è di misura superficiale nulla* ($\text{mis}\, E = 0$);

2) *Le rette* $x =$ cost. *che intersecano* E *in un insieme* E_x *di misura (lineare) non nulla, formano un insieme di misura (lineare* (12)*) nulla; e lo stesso scambiando fra loro* x *ed* y (13)».

Per dimostrare questo lemma, consideriamo la totalità $\{\alpha_i\}$ dei numeri razionali ($\gtreqless 0$), comunque numerata. Indichiamo poi con e_i l'insieme dei punti di Γ, nei quali è $f > \alpha_i$, per cui si avrà ovviamente $e_j \supseteq e_i$, per ogni j tale che $\alpha_j < \alpha_i$. Poiché $f(x,y)$ è supposta misurabile in Γ, gl'insiemi e_i saranno misurabili (14). Seguendo Lebesgue, è allora possibile costruire, per ogni indice i, un insieme

---

(9) Con $d\sigma$ è inteso, come nelle formule del n. 4, l'elemento d'area del piano xy. Nel secondo e nel terzo membro, le integrazioni lineari esterne sono estese di fatto alle proiezioni di Γ rispettivamente sull'asse y e sull'asse x. Quelle interne, invece, sono estese: per ogni y della proiezione di Γ sull'asse y, all'intersezione di Γ con la retta $y =$ cost. (nel 2° membro); per ogni x della proiezione di Γ sull'asse x, all'intersezione di Γ con la retta $x =$ cost. (nel 3° membro).

Ma più semplicemente si può anche supporre, con FUBINI, che le integrazioni esterne siano estese addirittura a tutto l'asse y (rispettivamente x), a tutto l'asse x (rispettivamente y). Ciò perché l'integrale di una qualunque funzione, esteso all'insieme vuoto, è nullo.

(10) Cioè tale che ogni sua intersezione con una retta $x =$ cost. sia un insieme misurabile, e così ogni sua intersezione con una retta $y =$ cost.

(11) Cioè $\varphi(x,y)$ sia tale che le funzioni della sola x che se ne deducono ponendovi $y =$ cost., risultino misurabili; e lo stesso scambiando fra loro x ed y.

(12) S'intende: «*lineare sull'asse* x».

(13) Ciò equivale a richiedere che sia:
$\text{mis}_y E_x = 0$ per quasi tutti gli x, $\text{mis}_x E_y = 0$ per quasi tutti gli y. Il simbolo mis_y si legge: «la misura lineare nella direzione dell'asse y». Analogamente si legge il simbolo mis_x.

(14) Cfr. la *Tesi* di LEBESGUE («*Intégrale, longueur, aire*», Annali di Mat. 1902), pp. 274 e segg.

$e'_i \subseteq e_i$ che sia misurabile non solo superficialmente (come e_i), ma *anche linearmente*, e tale che mis e'_i = mis e_i (15).

Poniamo poi

$$E = \Gamma - \bigcup_{i=1}^{\infty} e'_i$$

o, ciò ch'è lo stesso, dato che

$$\Gamma = \bigcup_{i=1}^{\infty} e_i,$$

$$E = \bigcup_{i=1}^{\infty} (e_i - e'_i).$$

Sarà dunque, poiché mis $(e_i - e'_i) = 0$ per ogni i, anche

(1) $$\text{mis}\, E = 0.$$

Essendo Γ e tutti gli e'_i linearmente misurabili, tale è anche

$$E = \Gamma - \bigcup_{i=1}^{\infty} e'_i.$$

Quindi, seguendo Lebesgue, può scriversi:

$$\text{mis}\, E = \int \text{mis}_y\, E_x\, dx = \int \text{mis}_x\, E_y\, dy.$$

Ciò significa che (esistendo $\text{mis}_y\, E_x$ e $\text{mis}_x\, E_y$ ovunque sull'asse x la prima, e ovunque sull'asse y la seconda) dovrà precisamente essere, tenendo conto della (1).

(2) $$\begin{cases} \text{mis}_y\, E_x = 0 & \text{quasi ovunque sull'asse } x, \text{ e} \\ \text{mis}_x\, E_y = 0 & \text{quasi ovunque sull'asse } y. \end{cases}$$

(Cfr. la nota (13)).

Resta ora da farsi la costruzione della funzione $\varphi(x, y)$. All'uopo poniamo:

$$\varphi(x,y) = \begin{cases} f(x,y) & \text{in } \bigcup_{i=1}^{\infty} e'_i = \Gamma - E, \\ \lambda \text{ (costante reale arbitraria) in } E. \end{cases}$$

---

(15) Seguendo LEBESGUE (loc. cit.), si potrebbero costruire gli e'_i in modo da risultare addirittura misurabili secondo BOREL.

E' immediato che $\varphi(x, y)$ è superficialmente misurabile in Γ, essendo $f(x, y)$ tale in $\Gamma - E$. Dimostriamo che $\varphi(x, y)$ è misurabile anche linearmente in Γ.

Infatti, se β è un numero reale qualunque, G_β l'insieme dei punti di Γ nei quali è $\varphi(x, y) > \beta$, e infine $\alpha_{i_1}, \alpha_{i_2}, \ldots$ sono i numeri razionali $> \beta$, risulterà:

$$G_\beta = \begin{cases} \bigcup_{k=1}^{\infty} e'_{i_k} & \text{nell'ipotesi } \beta > \lambda, \\ \left(\bigcup_{k=1}^{\infty} e'_{i_k} \right) \cup E & \text{nell'ipotesi } \beta < \lambda. \end{cases}$$

Ne segue che G_β è linearmente misurabile, perché in ogni caso unione d'insiemi linearmente misurabili. Infine, per l'arbitrarietà di β, $\varphi(x, y)$ è linearmente misurabile, e il lemma è completamente dimostrato.

Ciò premesso, veniamo alla dimostrazione del teor. di Fubini distinguendo, nella prima ipotesi, due casi possibili.

Caso A: *$f(x, y)$ sia limitata in* Γ. Essendo, per ipotesi, $f(x, y)$ sommabile in Γ, essa è ivi anche misurabile. Applicando il lemma, si avrà una $\varphi(x, y)$ anch'essa limitata in Γ e

$$(3) \qquad \int_\Gamma f \, d\sigma = \int_\Gamma \varphi \, d\sigma \qquad \text{(in virtù della (1)).}$$

Poiché, per funzioni che, come la φ, sono limitate e misurabili (tanto superficialmente che linearmente), la formula di decomposizione è stata già dimostrata da Lebesgue, si avrà:

$$(4) \qquad \int_\Gamma \varphi \, d\sigma = \int dy \int \varphi \, dx = \int dx \int \varphi \, dy.$$

Qui, nel 2° e 3° membro, sarà (v. nota (9)) (16):

$$\int \varphi \, dx = \int_{\Gamma_y} \varphi \, dx, \qquad \int \varphi \, dy = \int_{\Gamma_x} \varphi \, dy,$$

e, in virtù delle (2),

---

(16) Per il significato degl'indici x ed y apposti agl'insiemi delle integrazioni lineari che seguono, v. l'analogo significato indicato per E_x ed E_y nell'enunciato del lemma.

$$\int_{\Gamma_y} \varphi\, dx = \int_{(\Gamma - E)_y} \varphi\, dx \qquad \text{per quasi tutti gli } y,$$

$$\int_{\Gamma_x} \varphi\, dy = \int_{(\Gamma - E)_x} \varphi\, dy \qquad \text{per quasi tutti gli } x.$$

Si avrà dunque:

$$\int_{\Gamma_y} \varphi\, dx = \int_{(\Gamma - E)_y} f\, dx = \int_{\Gamma_y} f\, dx = \int f\, dx$$

per quasi tutti gli y, e analogamente:

$$\int_{\Gamma_x} \varphi\, dy = \int_{(\Gamma - E)_x} f\, dy = \int_{\Gamma_x} f\, dy = \int f\, dy$$

per quasi tutti gli x.

Sostituendo dunque nella (4) e tenendo conto della (3), si avrà infine:

$$\int_{\Gamma} f\, d\sigma = \int dy \int f\, dx = \int dx \int f\, dy, \qquad \text{c.d.d.}$$

Caso B: *$f(x, y)$ sia illimitata in* Γ. Seguendo Lebesgue, poniamo:

$$f = \varphi_1 + \varphi_2, \quad \text{con} \quad \begin{cases} \varphi_1 \text{ sempre} \geqslant 0 \\ \varphi_2 \text{ sempre} \leqslant 0 \end{cases} \quad \text{funzioni entrambe sommabili in } \Gamma, \text{(17)}$$

e

$$\int_{\Gamma} f\, d\sigma = \int_{\Gamma} \varphi_1\, d\sigma + \int_{\Gamma} \varphi_2\, d\sigma.$$

Basterà dimostrare il teorema separatamente per le due funzioni φ_1, φ_2. Per

---

(17) Questa decomposizione può farsi semplicemente prendendo, in tutto Γ,

$$\varphi_1 = \begin{cases} f & \text{ove } f \geqslant 0 \\ 0 & \text{ove } f < 0 \end{cases} \qquad \varphi_2 = \begin{cases} 0 & \text{ove } f \geqslant 0 \\ f & \text{ove } f < 0. \end{cases}$$

semplicità dunque supponiamo che *la f stessa abbia segno costante* in tutto Γ, sia per es. sempre $\geqslant 0$.

Prefissiamoci allora una successione di numeri K_n tali che:

$$0 < K_1 < K_2 < \ldots < K_{n-1} < K_n < \ldots \to \infty,$$

e poniamo, in Γ:

$$\psi_n(x,y) = \begin{cases} f(x,y) & \text{ove } f \leqslant K_n \\ K_n & \text{ove } f > K_n \end{cases} \qquad (\text{per ogni } n = 1, 2, \ldots).$$

Queste ψ_n risultano limitate e perciò, applicando il caso A:

$$\int_\Gamma \psi_n \, d\sigma = \int dx \int \psi_n \, dy. \tag{5}$$

D'altra parte, sempre seguendo Lebesgue, si potrà scrivere (per definizione dell'integrale di una funzione illimitata):

$$\int_\Gamma f \, d\sigma = \lim_{n\to\infty} \int_\Gamma \psi_n \, d\sigma. \tag{6}$$

Quanto agl'integrali lineari interni ai secondi membri delle (5), essi esistono per quasi tutti gli x (18). Poniamo pertanto

$$\int \psi_n \, dy = v_n(x), \tag{7}$$

per cui si avrà $0 \leqslant \ldots \leqslant v_n(x) \leqslant v_{n+1}(x) \leqslant \ldots$, per ogni n e per quasi tutti gli x.

Da (5), (6) e (7) segue:

$$\int_\Gamma f \, d\sigma = \lim_{n\to\infty} \int v_n(x) \, dx.$$

La successione $\{v_n(x)\}$ si trova dunque nelle condizioni di un ben noto e fondamentale teorema di B. Levi sull'integrazione per serie (Rendic. Istituto Lombardo,

---

(18) O, se si preferisce, su quasi tutta la proiezione di Γ sull'asse x (v. nota (9)).

1906) [19], per cui si avrà:

$$\int_\Gamma f\,\mathrm{d}\sigma = \int \lim_{n\to\infty} v_n(x)\,\mathrm{d}x. \tag{8}$$

D'altra parte, per la definizione dell'integrale della funzione illimitata $f(x,y)$, si può scrivere:

$$\lim_{n\to\infty} v_n(x) = \lim_{n\to\infty} \int \psi_n\,\mathrm{d}y = \int f(x,y)\,\mathrm{d}y,$$

per quasi tutti gli x e pertanto, in virtù della (8),

$$\int_\Gamma f\,\mathrm{d}\sigma = \int \mathrm{d}x \int f(x,y)\,\mathrm{d}y.$$

Analogamente si dimostra che

$$\int_\Gamma f\,\mathrm{d}\sigma = \int \mathrm{d}y \int f(x,y)\,\mathrm{d}x, \qquad \text{c.d.d. (20).}$$

II Ipotesi: Γ *non sia linearmente misurabile*. Seguendo Lebesgue, è possibile costruire un insieme $\Gamma' \supset \Gamma$, che sia non solo superficialmente misurabile (come Γ), ma anche *linearmente* e tale che mis Γ' = mis Γ [21]. Analogamente è poi possibile costruire anche un insieme $L \supset \Gamma' - \Gamma$, che sia misurabile tanto superficialmente quanto linearmente, e tale che mis L = mis $(\Gamma' - \Gamma) = 0$.

---

(19) Si tratta infatti di una successione di funzioni sommabili e mai negative, successione non decrescente e tale che l'insieme numerico

$$\left\{\int v_n(x)\,\mathrm{d}x\right\}$$

è limitato.

(20) Nell'ultima parte della dimostrazione di questo caso B, mi sono leggermente discostato dal ragionamento originale di FUBINI, il quale si appoggia, oltre che al teor. di LEVI, anche ad altro di G. VITALI (Rendic. Circolo Mat. di Palermo, vol. 23, 1907). Mi sembra di aver ottenuto, in tal modo, una leggera semplificazione.

(21) Vale un'osservazione analoga a quella della nota (15).

Consideriamo la funzione ausiliaria, definita in Γ':

$$\varphi(x,y) = \begin{cases} f(x,y) & \text{in } \Gamma \\ 0 & \text{in } \Gamma' - \Gamma. \end{cases}$$

Si avrà:

$$\int_{\Gamma'} \varphi \, d\sigma = \int_{\Gamma} \varphi \, d\sigma + \int_{\Gamma' - \Gamma} \varphi \, d\sigma = \int_{\Gamma} f \, d\sigma, \tag{9}$$

e, per quasi tutti gli y:

$$\int f \, dx = \int \varphi \, dx \text{ [22]}. \tag{10}$$

Ma

$$\int \varphi \, d\sigma = \int dy \int \varphi \, dx,$$

per quanto dimostrato nella prima ipotesi [23]. Pertanto, in virtù delle (9), (10):

$$\int f \, d\sigma = \int dy \int f \, dx.$$

Analogamente si dimostra che

---

[22] Infatti, per tutti gli y, L_y è misurabile nella direzione dell'asse x, e, per quasi tutti gli y, è $\text{mis}_x L_y = 0$ (Ciò si vede con ragionamento analogo a quello fatto relativamente all'insieme E nella dimostrazione del lemma, v. sopra). Ne segue che dovrà essere anche

$$\text{mis}_x (\Gamma' - \Gamma)_y = 0, \text{ per quasi tutti gli } y.$$

Si potrà dunque scrivere la (10) più precisamente:

$$\int_{\Gamma_y} f \, dx = \int_{\Gamma'_y} \varphi \, dx - \int_{(\Gamma' - \Gamma)_y} \varphi \, dx = \int_{\Gamma'_y} \varphi \, dx.$$

[23] Più precisamente:

$$\int_{\Gamma'} \varphi \, d\sigma = \int dy \int_{\Gamma'_y} \varphi \, dx.$$

$$\int f \, d\sigma = \int dx \int f \, dy, \qquad \text{c.d.d.}$$

N.B. La nota di Fubini contiene anche un cenno, sia pure fugace, alle possibili generalizzazioni del Suo teorema al caso di funzioni definite in coordinate polari o in altri sistemi di cordinate curvilinee.

7. Se, al dilà di quanto Egli ebbe a dichiarare modestamente nella conferenza [5] e che ho testualmente riportato al principio del n. 5, ci domandiamo la vera ragione per la quale Fubini non volle mai proseguire sulla lunga e avventurosa strada da Lui aperta da grande maestro con la nota [1], confesso di non saper rispondere. Ora mi pongo questa domanda non più sotto il profilo storico generale cui ho accennato alla fine del n. 1, ma proprio pensando alle Sue scelte personali, indipendenti (se ciò ha un senso) da quelle di altri.

Non si può infatti fare a meno di constatare che le tre note [2], [3], [4], sopra citate, sono d'importanza e consistenza assai inferiore alla [1], seppur sempre brillanti. Fatto, questo, che confermerebbe ciò che sopra ho scritto: il non pieno riconoscimento che Fubini avrebbe avuto dell'importanza della propria scoperta.

Nella mia non lunga dimestichezza con Lui, non ebbi mai il coraggio di rivolgerGli questa domanda. Ma quell'anno nel quale io ebbi la straordinaria fortuna di lavorare al Suo fianco, ma non le capacità di approfittarne come avrei dovuto, mi appare ormai tanto lontano e diverso, che anche di questo mio comportamento personale non saprei dare spiegazione.

Forse la risposta sul perché della scelta di Fubini, è più semplice e si può riassumere nelle poche parole di Alessandro Terracini: «*Fubini non amava il concetto particolare, non inquadrato in una veduta più generale*» (24). Poiché dunque alla scoperta del teorema della nota [1] Fubini era giunto per esigenze particolari e attraverso una ricerca del tutto particolare, così Egli passò oltre e non si curò più, attratto da tutt'altri interessi, di gettare il Suo acutissimo sguardo su vedute più generali in quel contesto.

Comunque sia, m'incombe l'impegno di accennare anche al contenuto delle restanti tre note.

La nota [2] è dedicata al problema inverso di quello in cui il teorema dimostrato in [1] dà la soluzione. Infatti in [2] Fubini domanda se, supposta l'esistenza, in Γ, di uno dei due integrali doppi

(24) *Opere scelte*, vol. III, p. 36.

$$(11) \qquad \int dy \int f\, dx, \qquad \int dx \int f\, dy,$$

si possa affermare sempre anche l'esistenza dell'integrale superficiale

$$\int f\, d\sigma$$

e quindi anche quella dell'altro integrale doppio, e infine la validità della formula di decomposizione.

A tale domanda Fubini riesce a dare risposta affermativa, premettendo due ipotesi restrittive pregiudiziali:

1) che l'insieme Γ, al quale è estesa l'integrazione, sia limitato e misurabile;

2) che la funzione integranda $f(x, y)$ sia misurabile in Γ.

Subordinatamente a tali ipotesi, Fubini dimostra che la risposta è affermativa, a partire per es. dal primo degl'integrali doppi (11), se e solo se esiste lo stesso integrale esteso a qualunque insieme misurabile $\Gamma_0 \subseteq \Gamma$.

La nota [3] è soltanto la segnalazione del fatto che lo stesso risultato era già stato ottenuto da L. Tonelli (25).

La nota [4] è uno scambio di lettere fra Tonelli e Fubini. Tonelli propone a Fubini un problema che scaturisce da un teorema già dimostrato da Lebesgue. Egli considera un integrale doppio (nel senso di Lebesgue) del tipo:

$$F(x, y) = \int_0^x d\xi \int_0^y f(\xi, \eta)\, d\eta,$$

in cui l'integrando è una funzione $f(x, y)$ sommabile in un certo campo A contenente l'origine $(0, 0)$. Lebesgue aveva già dimostrato l'esistenza di un insieme $\bar{A} \subseteq A$, misurabile e tale che:

1) $\text{mis}\, \bar{A} = \text{mis}\, A$;

2) in tutto $\bar{A}$ risulta

$$\frac{\delta F}{\delta x} = \int_0^y f(x, \eta)\, d\eta;$$

3) in tutto $\bar{A}$ esiste finito il

(25) In una precedente nota Lincea (Rendic., vol. 18_2, 1909), ma con diverso enunciato.

$$(12) \qquad \lim \frac{\dfrac{\delta F(x,y')}{\delta x} - \dfrac{\delta F(x,y)}{\delta x}}{y'-y},$$

per (x, y') tendente a (x, y) *su* $\bar{A}$, e tale limite è $f(x, y)$.

Tonelli chiede a Fubini se è possibile (nel caso $\bar{A} \neq A$) restringere $\bar{A}$ in altro $\bar{A}'$ (dunque $\bar{A}' \subseteq \bar{A}$) che, oltre a soddisfare alle proprietà 1) e 2), possieda in ogni suo punto effettivamente la derivata seconda mista

$$\frac{\delta^2 F}{\delta x\, \delta y} = f(x,y) \quad (26).$$

Egli dimostra tale possibilità soltanto in particolari casi restrittivi (in ogni caso, per es., quando $f(x, y)$ è limitata in A).

Alla lettera di Tonelli, Fubini risponde brevemente con un contributo di dettaglio, dando alcune interessanti delucidazioni che, per altra via, semplificano e precisano un poco il risultato ottenuto dal Suo illustre collega.

---

(26) Cioè il rapporto incrementale scritto in (12) tenda ad $f(x,y)$, quando (x,y') tende al punto (x,y) di $\bar{A}'$, *linearmente su* A.

LUIGI GATTESCHI

IL CONTRIBUTO DI GUIDO FUBINI AGLI ALGORITMI ITERATIVI

1. Nel novembre del 1954 B. Segre commemorò Guido Fubini all'Accademia dei Lincei. Il testo della dotta Commemorazione è riportato nel primo volume delle Opere Scelte del Fubini [11].

Dalla lettura di questa commemorazione si apprende come il Fubini ricordasse, con un certo compiacimento, di aver trovato in terza liceo una serie fornente π con una convergenza più rapida degli analoghi sviluppi allora noti. Andando oltre si legge: «*Anche a Pisa manifestò ben presto la Sua spiccata disposizione per gli studi matematici e la Sua precocità, pubblicando – a soli 18 anni! – un interessante lavoro* [9] *in cui, ottenuta una funzione di due variabili reali con un procedimento di limite operato sull'iterazione alternata delle due operazioni di media aritmetica e geometrica, ne trae una nuova definizione delle funzioni circolari ed iperboliche inverse e della funzione logaritmica, ricavandone tutto un complesso di eleganti relazioni, utili anche per il calcolo numerico. L'anno appresso approfondì ulteriormente siffatte questioni* [10], *dimostrando fra l'altro che le funzioni* cos *e* log *sono le sole che soddisfino a certe equazioni funzionali*».

Non conosco la serie di cui parlava il Fubini, ma essa è certamente collegata ai suoi due primi lavori.

Intendo parlare di alcune questioni, più o meno recenti, che possono riallacciarsi a quelle ricerche giovanili di Fubini, nelle quali, come vedremo, vi è anche qualcosa di interesse attuale.

2. E' ben noto che l'algoritmo iterativo

$$x_{n+1} = \frac{x_n + y_n}{2}, \qquad y_{n+1} = \sqrt{x_n y_n}, \qquad (n = 0, 1, 2, \dots), \tag{1}$$

studiato da Lagrange [17, pp. 267, 272], è tale che

$$\lim_{n\to\infty} x_n = \lim_{n\to\infty} y_n = X(x_0, y_0). \tag{2}$$

Il limite comune $X(x_0, y_0)$ delle due successione $\{x_n\}$ e $\{y_n\}$ è detto *media*

aritmetico-geometrica di x_0 e y_0. Esso fu studiato da Gauss [13] che ne stabilì il legame con l'integrale ellittico completo di prima specie

$$K(k) = \int_0^{\pi/2} (1 - k^2 \sin^2 \varphi)^{-1/2} \, d\varphi, \qquad 0 \leqslant k < 1.$$

Più precisamente Gauss, utilizzando la cosiddetta *trasformazione di Landen* [19], provò che, se gli x_n e gli y_n sono generati dalle (1) ed è $0 < y_0 < x_0$, si ha

$$\frac{1}{x_{n+1}} K\left(\sqrt{1 - \left(\frac{y_{n+1}}{x_{n+1}}\right)^2}\right) = \frac{1}{x_n} K\left(\sqrt{1 - \left(\frac{y_n}{x_n}\right)^2}\right).$$

Da questa relazione, tenuto conto che per la (2) risulta

$$\lim_{n \to \infty} K\left(\sqrt{1 - \left(\frac{y_n}{x_n}\right)^2}\right) = K(0) = \frac{\pi}{2},$$

si deduce subito che

$$\frac{1}{X(x_0, y_0)} = \frac{2}{\pi x_0} K\left(\sqrt{1 - \left(\frac{y_0}{x_0}\right)^2}\right), \qquad 0 < y_0 < x_0.$$

In altre parole, l'integrale ellittico completo $K(k)$ può calcolarsi con l'algoritmo (1) assumendo

$$x_0 = \frac{2}{\pi}, \qquad y_0 = \frac{2}{\pi}\sqrt{1 - k^2}, \qquad 0 \leqslant k < 1.$$

Con delle modifiche l'algoritmo (1) può adattarsi al calcolo dell'integrale ellittico di prima specie

$$\int_0^{\varphi} (1 - k^2 \sin^2 \varphi)^{-1/2} \, d\varphi$$

e algoritmi del tipo (1) possono costruirsi per il calcolo di altri integrali ellittici [15]. Questi algoritmi sono quelli attualmente più usati per la generazione automatica delle suddette funzioni.

3. E' naturale chiedersi cosa succede se si sostituisce la media che figura nell'algoritmo (1) con la media geometrica fra x_{n+1} e y_n, cioè se si considera il cosiddetto *algoritmo del Borchardt*

$$x_{n+1} = \frac{x_n + y_n}{2}, \qquad y_{n+1} = \sqrt{x_{n+1} y_n}, \qquad (n = 0, 1, 2, \ldots). \tag{3}$$

Lo studio di questo algoritmo fu proposto da Gauss a Pfaff nel 1800 in una lettera che non è stata conservata. La pronta risposta (3 dicembre 1800) di Pfaff si è conosciuta però oltre un secolo dopo con la pubblicazione del decimo volume delle Opere di Gauss [14] nel 1917. Non deve pertanto meravigliare il fatto che all'algoritmo (3) non venga associato il nome di Pfaff, o quello di Gauss, ma quello di C. W. Borchardt [4]. Invero il Borchardt, sempre nell'intento di studiare un algoritmo simile a quello della media aritmetico-geometrica, provò, con una dimostrazione estremamente laboriosa, che

$$\lim_{n\to\infty} x_n = \lim_{n\to\infty} y_n = \begin{cases} \dfrac{\sqrt{y_0^2 - x_0^2}}{\arccos (x_0/y_0)}, & \text{se } 0 < x_0 < y_0, \\[2ex] \dfrac{\sqrt{x_0^2 - y_0^2}}{\log (x_0 + \sqrt{x_0^2 - y_0^2})/y_0}, & \text{se } 0 < y_0 < x_0. \end{cases} \tag{4}$$

Nel lavoro del Borchardt, come pure nella lettera di Pfaff a Gauss, non si trova alcun accenno alla possibilità di utilizzare l'algoritmo (3) per il calcolo delle funzioni a secondo membro della (4). Prescindendo dal contenuto dei lavori del Fubini, sui quali riferirò nel seguito, è solo in epoca recente che si è intravista una tale possibilità. Ciò ha suggerito anche lo studio di algoritmi più generali del tipo

$$x_{n+1} = f(x_n, y_n), \qquad y_{n+1} = g(x_n, y_n), \qquad (n = 0, 1, 2, \ldots), \tag{5}$$

dove le funzioni $f(x, y)$ e $g(x, y)$ sono funzioni omogenee di primo grado ed il sistema

$$x = f(x, y), \qquad y = g(x, y),$$

è indeterminato.

Per questi algoritmi, che conviene scrivere nella forma

$$x_{n+1} = y_n f\left(\frac{x_n}{y_n}, 1\right), \qquad y_{n+1} = y_n g\left(\frac{x_n}{y_n}, 1\right),$$

di guisa che, posto

$$\frac{x_n}{y_n} = z_n, \qquad g(z, 1) = G(z), \qquad \frac{f(z, 1)}{g(z, 1)} = H(z), \tag{6}$$

si ha

$$y_{n+1} = y_n \, G(z), \qquad z_{n+1} = H(z_n), \tag{7}$$

ed è poi immediato rappresentare

$$\lim_{n\to\infty} y_n = Y$$

mediante un prodotto infinito.

Si ha infatti, dalla prima delle (7),

$$y_{n+1} = y_0 \prod_{k=0}^{n} G(z_k), \qquad \text{con } z_{k+1} = H(z_k),$$

e quindi

$$Y = \lim_{n\to\infty} y_n = y_0 \prod_{k=0}^{\infty} G(z_k), \tag{8}$$

supposto che il prodotto infinito risulti convergente.

Nel caso dell'algoritmo del Borchardt le (7) diventano

$$y_{n+1} = y_n \sqrt{\frac{1+z_n}{2}}, \qquad z_{n+1} = \sqrt{\frac{1+z_n}{2}};$$

e quest'ultima, tenuto conto della formula di bisezione del coseno – supposto che sia $0 < z_0 < 1$ e quindi anche $0 < z_n < 1$ – suggerisce di porre

$$z_n = \frac{x_n}{y_n} = \cos \alpha_n .$$

Si ha allora

$$\alpha_n = \frac{\alpha_{n-1}}{2} = \frac{\alpha_{n-2}}{2^2} = \ldots = \frac{\alpha_0}{2^n},$$

donde

$$\lim_{n\to\infty} z_n = 1$$

e, per la (8),

$$Y = \lim_{n\to\infty} x_n = \lim_{n\to\infty} y_n = y_0 \prod_{k=0}^{\infty} \cos \frac{\alpha_0}{2^k};$$

ma per una formula di trigonometria

$$\prod_{k=0}^{n} \cos \frac{\alpha_0}{2^k} = \frac{\sin \alpha_0}{2^n \sin (\alpha_0/2^n)}.$$

Passando al limite per $n \to \infty$ si trova

$$Y = y_0 \frac{\sin \alpha_0}{\alpha_0}$$

e cioè il primo limite nella (4).

Nel caso che risulti $0 < y_0 < x_0$ basta porre

$$z_n = \frac{x_n}{y_n} = \operatorname{Ch} \alpha_n,$$

ed un procedimento perfettamente analogo conduce al secondo limite nella (4).

4. Il merito del rinnovato interesse per lo studio degli algoritmi di cui sopra è dovuto a F. G. Tricomi [20] che nel 1965, con una sua generalizzazione dell'algoritmo del Borchardt, dette l'avvio ad una serie di lavori, alcuni dei quali sono dedicati esclusivamente alle applicazioni al calcolo automatico. Al riguardo possono vedersi i lavori citati nella Bibliografia, mentre ulteriori indicazioni si trovano nei lavori del Tricomi [21, 22], di G. Allasia [1] ed in un recente volume del Carlson [8].

Mi limiterò qui a ricordare che al Carlson [5] è dovuta la scoperta dell'intimo legame tra una classe di algoritmi del tipo (5) e certe funzioni ipergeometriche gaussiane simmetrizzate.

Tra gli algoritmi di interesse applicativo ricorderò l'algoritmo del Carlson [5]

$$(9) \qquad \begin{cases} x_{n+1} = \dfrac{1}{2} \sqrt{(x_n + y_n)(x_n + \sqrt{k^2 x_n^2 + k'^2 y_n^2})}, \\ y_{n+1} = \dfrac{1}{2} \sqrt{(x_n + y_n)(y_n + \sqrt{k^2 x_n^2 + k'^2 y_n^2})}, \end{cases} \qquad (k^2 + k'^2 = 1)$$

che si riduce a quello del Borchardt per $k = 0$ e per il quale, nell'ipotesi che sia $0 \leqslant x_0 < y_0$, risulta

$$\lim_{n\to\infty} x_n = \lim_{n\to\infty} y_n = \frac{\sqrt{y_0^2 - x_0^2}}{cn^{-1}\left(\dfrac{x_0}{y_0}, k\right)},$$

dove cn^{-1} è l'inversa della funzione ellittica cn.

Un altro algoritmo [12]

$$(10)\qquad \begin{cases} x_{n+1} = x_n \dfrac{(q-1)x_n + (3-q)y_n}{2y_n}, \\[2ex] y_{n+1} = x_{n+1} \dfrac{y_n}{qx_n + (1-q)y_n}, \end{cases} \qquad (n = 0, 1, 2, \ldots; |q| < 1)$$

è legato al prodotto infinito

$$\prod_{n=0}^{\infty} (1 - aq^n),$$

che, nella teoria delle funzioni ipergeometriche generalizzate, ha un'importanza pari a quella della funzione gamma nella teoria delle funzioni ipergeometriche ordinarie. Più precisamente si ha che, posto

$$\frac{x_0}{y_0} = \frac{1 + 2a - q}{1 - q},$$

risulta

$$\lim_{n \to \infty} x_n = \lim_{n \to \infty} y_n = x_0 \prod_{n=0}^{\infty} (1 - aq^n).$$

L'uso di questo algoritmo, che è risultato competitivo con altri procedimenti, ha permesso a G. Allasia e F. Bonardo [3] la costruzione di estese tavole di prodotti infiniti del tipo del precedente.

5. Passiamo ora ad esaminare alcuni contributi del Fubini alla teoria ed alla applicazione degli algoritmi iterativi.

Nel primo lavoro [9] Egli studia l'algoritmo che ora viene detto «del Borchard» e perviene alla determinazione del suo limite con una elegante ed estremamente elementare dimostrazione della quale daremo un breve cenno.

E' interessante notare preliminarmente che il Fubini, all'epoca di questo suo primo lavoro, non conosceva né il lavoro del Borchardt, anche se ormai già da alcuni anni pubblicato, né l'algoritmo di Gauss della media aritmetico-geometrica. E' possibile però rendersi conto di come Egli fu condotto ad un tale studio.

Nei classico trattato di geometria elementare di Rouché e De Comberousse [18] vi sono alcuni paragrafi, dedicati al calcolo di π col metodo degli isoperimetri, che devono aver particolarmente interessato il Fubini.

Indichiamo con a ed r rispettivamente l'apotema ed il raggio di un poligono

regolare di k lati e con a' ed r' apotema e raggio di un poligono regolare di $2k$ lati avente lo stesso perimetro del precedente poligono. Si prova elementarmente che sussistono le relazioni

$$a' = \frac{1}{2}(a + r), \qquad r' = \sqrt{ra'} \ ;$$

inoltre se il perimetro del poligono è 2 risulta

$$a < \frac{1}{\pi} < r.$$

Pertanto se si costruisce la successione, cosiddetta di Schwab,

$$0, \frac{1}{2}, a_1, r_1, a_2, r_2, \dots ,$$

in cui ogni elemento, a partire da a_1, è ottenuto facendo alternativamente la media aritmetica e la media geometrica dei due precedenti, si ha

$$a_n < \frac{1}{\pi} < r_n,$$

ed è

$$\lim_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty} r_n = \frac{1}{\pi}.$$

In altre parole, l'algoritmo

$$x_{n+1} = \frac{x_n + y_n}{2}, \qquad y_{n+1} = \sqrt{x_{n+1} y_n}, \qquad (n = 0, 1, 2, \dots), \tag{11}$$

con $x_0 = 0$ e $y_0 = 1/2$, converge a $1/\pi$.

E' questo risultato che suggerì al Fubini di trattare il caso in cui i valori iniziali x_0 e y_0 dell'algoritmo sono generici. Il procedimento da Lui usato si basa sulla ricerca di un «invariante della trasformazione (11)». Più precisamente si prova facilmente che, supposto ad esempio $0 < x_0 < y_0$, risulta

$$\frac{\sqrt{y_{n+1}^2 - x_{n+1}^2}}{\arccos (x_{n+1}/y_{n+1})} = \frac{\sqrt{y_n^2 - x_n^2}}{\arccos (x_n/y_n)}.$$

Pertanto, se si è preliminarmente mostrato che le successioni $\{x_n\}$ e $\{y_n\}$ ammettono lo stesso limite $X(x_0, y_0)$, si ha subito che

$$X(x_0, y_0) = \frac{\sqrt{y_0^2 - x_0^2}}{\arccos(x_0/y_0)}, \qquad (0 < x_0 < y_0).$$

In modo del tutto analogo si tratta il caso $0 < y_0 < x_0$ facendo intervenire un invariante che coinvolge la funzione logaritmo.

Il merito del Fubini non è solo quello dell'aver dato la semplice ed elegante dimostrazione sopra riportata, bensì dell'aver intravisto nell'algoritmo un nuovo procedimento di calcolo delle trascendenti elementari. E' prova di ciò il riuscito tentativo del Fubini di accelerare la convergenza del procedimento associando alle due successioni $\{x_n\}$ e $\{y_n\}$ la successione $\{z_n\}$ così definita

$$(12) \qquad z_n = \frac{x_n + 2y_n}{3} = \frac{4x_n - x_{n-1}}{3},$$

che, con meno iterazioni, permette di ottenere buone approssimazioni di $X(x_0, y_0)$.

Di minore interesse è l'algoritmo

$$(13) \qquad x_{n+1} = \sqrt{x_n \frac{x_n + y_n}{2}}, \qquad y_{n+1} = \sqrt{x_n y_n},$$

trattato nella seconda breve Nota [10] giovanile del Fubini.

Invero basta osservare che se, dopo averlo scritto nella forma

$$x_{n+1}^2 = \frac{x_n^2 + y_{n+1}^2}{2}, \qquad y_{n+1}^2 = x_n y_n,$$

si pone

$$x_{n+1}^2 = u_{n+1}, \qquad y_{n+1}^2 = v_n,$$

esso si riduce a

$$u_{n+1} = \frac{u_n + v_n}{2}, \qquad v_{n+1} = \sqrt{u_{n+1} v_n}$$

cioè al precedente (11).

Notevole invece, come il Fubini stesso riconosce, la conclusione di questa Nota in cui si fa vedere come il problema della determinazione del limite nei precedenti algoritmi possa essere ricondotto a quello della risoluzione di una equazione funzionale che, nel caso dell'algoritmo di Borchardt, si riduce alla ben nota

$$\varphi(2x) = 2\varphi^2(x) - 1,$$

cui soddisfa $\varphi(x) = \cos x$.

La determinazione dell'equazione funzionale da associarsi ai più generali algoritmi (5) è stata fatta da G. Allasia [1] nel 1970.

6. Desidero concludere con alcune osservazioni sull'utilizzazione dell'algoritmo del Borchardt ai fini della generazione automatica delle funzioni elementari.

L'applicazione dell'algoritmo richiede in generale dalle 15 alle 20 iterazioni per giungere ad un risultato con 10 cifre significative esatte. Ne segue che si devono calcolare dalle 15 alle 20 radici quadrate e ciò è dispendioso anche su un elaboratore elettronico. Per rendere competitivo il metodo rispetto agli altri esistenti occorre pertanto aumentare la rapidità di convergenza.

Allo scopo B. C. Carlson [7] ha dimostrato che l'attualmente molto usato procedimento di Romberg [16] conduce, nel caso dell'algoritmo del Borchardt, al seguente schema triangolare

$$\begin{array}{lllll}
x_0^{(0)} & & & & \\
x_1^{(0)} & x_1^{(1)} & & & \\
x_2^{(0)} & x_2^{(1)} & x_2^{(2)} & & \\
\cdots & \cdots & \cdots & & \\
\cdots & \cdots & \cdots & & \\
x_n^{(0)} & x_n^{(1)} & x_n^{(2)} & \cdots & x_n^{(n)} \\
\cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots
\end{array}$$

così costruito

$$x_i^{(0)} = x_i, \qquad i = 0, 1, 2, \ldots$$

$$x_i^{(k)} = \frac{4^k x_i^{(k-1)} - x_{i-1}^{(k-1)}}{4^k - 1}, \qquad k = 1, 2, \ldots; \qquad i = k, k+1, \ldots$$

In tale schema ogni colonna converge più rapidamente della colonna precedente ed in generale è sufficiente il calcolo di 3 radici quadrate per avere il limite dell'algoritmo con (10) cifre significative esatte.

Si noti che la successione $\{x_i^{(1)}\}$ non è altro che la successione (12) considerata dal Fubini.

BIBLIOGRAFIA.

[1] ALLASIA G., *Su una classe di algoritmi iterativi bidimensionali*, Rend. Semin. Mat. Torino, 29 (1969 - 70), 269 - 296.

[2] ALLASIA G., *Relazioni fra una classe di algoritmi iterativi bidimensionali ed una di equazioni differenziali*, Rend. Semin. Mat. Torino, 30 (1970 - 71), 187 - 207.
[3] ALLASIA G., BONARDO F., *On the numerical evaluation of two infinite products*, Math. Comput., 35 (1980), 917 - 931.
[4] BORCHARDT C. W., *Sur deux algorithmes analogues à celui de la moyenne arithmético-géométrique de deux éléments*, in L. Cremona ed. «In memoriam Dominici Chelini, Collectanea Mathematica ecc.» U. Hoepli, Milano, 1881.
[5] CARLSON B. C., *Hidden simmetries of special functions*, SIAM Review, 12 (1970), 332 - 345.
[6] CARLSON B. C., *Algorithms involving arithmetic and geometric means*, Amer. Math. Montly, 78 (1971), 496 - 505.
[7] CARLSON B. C., *An algorithm for computing logarithms and arctangents*, Math. Comput., 26 (1972), 543 - 549.
[8] CARLSON B. C., *Special functions of applied mathematics*, Academic Press, New York, 1977.
[9] FUBINI G., *Nuovo metodo per lo studio e per il calcolo delle funzioni trascendenti elementari*, Period. Matem., 12 (1897), 169 - 178.
[10] FUBINI G., *Di una nuova successione di numeri*, Period. Matem., 14 (1898), 147 - 149.
[11] FUBINI G., *Opere Scelte*, vol. I, Cremonese, Roma, 1957.
[12] GATTESCHI L., *Procedimenti iterativi per il calcolo numerico di due prodotti infiniti*, Rend. Semin. Mat. Torino, 29 (1969 - 70), 187 - 202.
[13] GAUSS C. F., *Werke*, vol. 3, Teubner, Leipzig, 1876.
[14] GAUSS C. F., *Werke*, vol. 10, part 1, Teubner, Leipzig, 1917.
[15] HART J. F. et al., *Computer Approximations*, Wiley, New York, 1968.
[16] HENRICI P., *Applied and computational complex analysis*, vol. 2, Wiley, New York, 1976.
[17] LAGRANGE J. L., *Oeuvres*, vol. 2, Gauthier-Villars, Paris, 1868.
[18] ROUCHÉ E., CH. DE COMBEROUSSE, Traité de Géometrie, 5me Ed. 1er Partie, Gauthier-Villars, Paris, 1883.
[19] TRICOMI F. G., *Funzioni ellittiche*, Zanichelli, Bologna, 1951.
[20] TRICOMI F. G., *Sull'algoritmo iterativo del Borchardt e su una sua generalizzazione*, Rend. Circ. Mat. Palermo, (2), 14 (1965), 85 - 94.
[21] TRICOMI F. G., *Lectures on the use of special functions by calculations with electronic computers*, Lectures Series n. 47, The Institut for Fluid Dynamics and Applied Mathematics, Univ. of Maryland (1966).
[22] TRICOMI F. G., *Sugli algoritmi iterativi nell'analisi numerica*, Convegno Intern. sui «Metodi valutativi nella Fisica-matematica», Acc. Lincei, Roma, 1975, Quaderno n. 217.

FULVIA SKOF

Intorno a un'equazione funzionale.

Summary. *In connection with a result of Guido Fubini concerning a characterization of logarithm as a solution of funcional equation $f(x^2) = 2f(x)$, A. studies some classes of functional equations in a single variable arising from a kind of problems involving asymptotic conditions. Various consequences and applications are obtained.*

1. Introduzione

In una breve Nota giovanile dedicata allo studio di una particolare successione numerica, Guido Fubini [1] deduceva da certe formule in essa stabilite una caratterizzazione del logaritmo come l'unica funzione f che possiede entrambe le seguenti proprietà: $f(x^2) = 2f(x)$ per ogni $x > 0$ e $f(x)/(x-1) \to 1$ per $x \to 1$.

L'interesse di una tale osservazione, alla luce di più recenti studi sulle equazioni funzionali in una sola variabile nel caso particolare dell'equazione

$$f(x^2) = 2f(x) \qquad \text{per ogni} \quad x > 0, \tag{1}$$

è duplice: da un lato, essa consente di pervenire alla soluzione $\log x$ con la sola ulteriore condizione della derivabilità nel punto $x = 1$ (mentre altre caratterizzazioni anche recentemente stabilite impegnano proprietà globali di concavità o di derivabilità della f sul semiasse $x > 0$); d'altro canto, la tecnica elementare della dimostrazione, che sfrutta una proprietà ricorrente della successione numerica stessa, si presta proficuamente allo studio di classi di equazioni funzionali di tipo più generale che sembrano di un certo interesse.

In occasione di questo Convegno celebrativo ho piacere di presentare alcuni primi risultati, non ancora pubblicati, di una ricerca che ho in corso intorno a certe classi di equazioni funzionali collegate con quella in (1), ricerca che proprio da quella breve Nota di Guido Fubini ha tratto il suggerimento di una semplice tecnica dimostrativa rivelatasi efficace per vari problemi che in tale ambito si presentano naturalmente.

Presenterò brevemente tali problemi prima di passare a richiamare in qualche dettaglio il contributo di Fubini.

2. Equazioni funzionali asintotiche

Un'equazione funzionale, per esempio la (1), vincola il valore della funzione incognita f in corrispondenza di ogni valore della x, variabile in un dato insieme (per esempio l'intervallo $x > 0$). Quale influenza potrà avere sull'andamento della f una condizione funzionale che venga imposta asintoticamente per x tendente a un valore fissato, finito o infinito?

Questo problema, che porta a considerare quelle che potremmo chiamare «equazioni funzionali asintotiche», presenta aspetti alquanto differenti a seconda che la relazione funzionale impegni una o più variabili indipendenti.

Infatti, se consideriamo per esempio l'equazione funzionale in due variabili corrispondente alla (1), cioè l'equazione di Cauchy

$$f(xy) - f(x) - f(y) = 0 \quad \text{per ogni} \quad x > 0, \quad y > 0, \tag{2}$$

e sostituiamo a questa una relazione di tipo asintotico $f(xy) - f(x) - f(y) \to 0$, si può provare [2] che sussiste il seguente

TEOREMA. *Nel quadrante $x > 0, y > 0$ le due relazioni funzionali*

$$f(xy) - f(x) - f(y) = 0 \quad \textit{per ogni} \quad x > 0, \ y > 0 \tag{2}$$

$$f(xy) - f(x) - f(y) \to 0 \quad \textit{per} \quad x + y \to +\infty \tag{3}$$

sono equivalenti.

Invece, per la coppia di relazioni funzionali in una sola variabile

$$f(x^2) - 2f(x) = 0 \quad \text{per} \quad x > 0$$

$$f(x^2) - 2f(x) \to 0 \quad \text{per} \quad x \to +\infty$$

non sussiste la proposizione analoga, come si vede facilmente con semplici esempi, da cui si rileva, in questo caso, la maggiore generalità della condizione asintotica rispetto a quella espressa dall'equazione. Va pure tenuto presente, nel caso della singola variabile, che sull'andamento della f influisce in modo essenziale oltre al comportamento asintotico per $x \to +\infty$ anche quello per $x \to 1$, così che si presentano come interessanti entrambe le seguenti attenuazioni della (1):

$$f(x^2) - 2f(x) \to 0 \quad \text{per} \quad x \to +\infty \tag{4}$$

$$f(x^2) \sim 2f(x) \quad \text{per} \quad x \to 1 \quad (\text{con } f(x) \neq 0 \text{ almeno in un intorno di } x = 1). \tag{5}$$

Su problemi che si inquadrano in questo ordine di idee, oltre che su questioni relative alle equazioni funzionali su un dominio ristretto, ci proponiamo di fissare l'attenzione nel seguito.

3. Un risultato di Fubini

Della Nota già citata di Guido Fubini [1] ci limitiamo qui a richiamare quei risultati che verranno utilizzati nella trattazione seguente.

Denotiamo con (φ) la successione

$$(\varphi) = \{a_1, b_1, a_2, b_2, \dots, a_k, b_k, \dots\}$$

dove $a_1 > 0$, $b_1 > 0$ e

$$a_k = \left(a_{k-1} \cdot \frac{a_{k-1} + b_{k-1}}{2}\right)^{1/2}, \quad b_k = (a_{k-1} b_{k-1})^{1/2} \quad \text{per } k \geqq 2.$$

Sussistono i seguenti teoremi:

TEOREMA A. «Nella successione (φ), la classe di numeri $a_1, a_2, \dots, a_n, \dots$ è contigua a quella dei numeri $b_1, b_2, \dots, b_n, \dots$, e il numero separatore delle due classi è il limite $\Phi(a_1, b_1)$ a cui tende (φ)».

TEOREMA B. «Fissati $a > 0, b > 0$ e posto $a_1 = (a + b)/2$, $b_1 = (ab)^{1/2}$, risulta

$$\log \frac{a}{b} = \frac{1}{2} \frac{a^2 - b^2}{\Phi^2(a_1, b_1)} \text{»}.$$

E' la dimostrazione del Teorema B che verrà ripresa nel seguito, e pertanto riteniamo utile accennarla qui schematicamente, per tralasciare le dimostrazioni successive che ad essa si ispirano. Seguendo le indicazioni di Fubini, si consideri il numero

$$\rho = \frac{1}{2} (a^2 - b^2) / \log \frac{a}{b} \quad \text{per} \quad a \neq b;$$

espressi a, b in funzione di a_1, b_1 (a_1 e b_1 medie aritmetica e geometrica, rispettivamente, di a e b), si ottiene

$$\rho = \frac{a_1 (a_1^2 - b_1^2)^{1/2}}{\log \dfrac{a_1 + (a_1^2 - b_1^2)^{1/2}}{b_1}}.$$

Espressi poi a_1, b_1 in funzione di a_2, b_2, e così via, si riconosce che risulta

$$\rho = \frac{a_k \cdot (a_k^2 - b_k^2)^{1/2}}{\log \dfrac{a_k + (a_k^2 - b_k^2)^{1/2}}{b_k}} \qquad \text{per ogni } k \geqq 1.$$

Tenuto poi conto che $a_k \to \Phi(a_1, b_1)$, $b_k \to \Phi(a_1, b_1)$, e che $\log x \sim 1 - x$ per $x \to 1$, si deduce

$$\rho = \frac{1}{2} \frac{a^2 - b^2}{\log a/b} =$$

$$= \lim_{k \to \infty} \frac{a_k (a_k^2 - b_k^2)^{1/2}}{\log \dfrac{a_k + (a_k^2 - b_k^2)^{1/2}}{b_k}} = \Phi^2(a_1, b_1)$$

da cui l'asserto.

La citata caratterizzazione del logaritmo viene enunciata da Fubini come corollario del Teorema B:

COROLLARIO. «Proprietà caratteristiche della funzione $\log x$ sono le seguenti

(i) $$f(\sqrt{x}) = \frac{1}{2} f(x),$$

(ii) $$\lim_{x \to 1} \frac{f(x)}{x - 1} = 1»,$$

con la seguente osservazione: «Infatti queste sole proprietà bastarono nelle precedenti dimostrazioni ad esprimere [. . .] $\log a/b$ in funzione di a e di b».

4. L'equazione funzionale $f(x^2) = 2f(x) + \omega(x)$

In relazione ai problemi accennati all'inizio, riguardanti l'equazione funzionale asintotica $f(x^2) - 2f(x) \to 0$, consideriamo l'equazione funzionale

$$f(x^2) = 2f(x) + \omega(x) \qquad \text{per ogni } x > 0,$$

dove supporremo che la funzione incognita f e la funzione data ω appartengano a due opportune classi funzionali. Potremo limitarci a considerare l'equazione sull'intervallo $1 \leqq x < +\infty$, poichè sull'intervallo $0 < x \leqq 1$ si procede nello stesso modo.

Introduciamo per brevità di linguaggio le seguenti classi:

$\mathscr{F}$ = classe delle funzioni $f : [1, +\infty) \to \mathbf{R}$ che ammettono in $x = 1$ derivata

destra $f'_+(1) \neq 0$;

$\mathscr{G}$ = classe delle funzioni $\omega : [1, +\infty) \to \mathbf{R}$ che ammettono in $x = 1$ derivata destra con $\omega'_+(1) = 0 = \omega(1)$.

Allora, un procedimento di carattere iterativo analogo a quello richiamato sopra consente di provare il seguente

TEOREMA 1. *L'equazione funzionale*

$$f(x^2) = 2f(x) + \omega(x) \qquad \textit{per ogni} \qquad x \geqq 1 \tag{7}$$

dove ω è una funzione assegnata in $\mathscr{G}$, possiede nella classe $\mathscr{F}$ l'unica soluzione

$$f(x) = c \log x + \frac{1}{2} \sum_{r=1}^{\infty} 2^r \omega(x^{1/2^r}) \qquad (x \geqq 1) \tag{8}$$

con $c = f'_+(1)$.

Da questo teorema si deducono immediatamente le seguenti proposizioni:

COROLLARIO 1. *$f(x) = f'_+(1) \log x$ è l'unica soluzione dotata di derivata destra non nulla in $x = 1$, dell'equazione funzionale $f(x^2) = 2f(x)$ $(x \geqq 1)$.*

COROLLARIO 2. *Data l'equazione funzionale* (7) *nella classe $\mathscr{F}$, con $\omega \in \mathscr{G}$ assegnata, se per qualche numero reale $\xi > 1$ risulta*

$$\sum_{r=1}^{\infty} 2^r \omega(\xi^{1/2^r}) = 0,$$

per quei valori ξ si ha $f(\xi) = f'_+(1) \log \xi$.

Un'applicazione. La conoscenza in forma esplicita della dipendenza di f da ω può essere opportunamente utilizzata per esempio di fronte alla disequazione funzionale

$$f(x^2) \geqq 2f(x) \qquad (\text{oppure} \leqq)$$

nella classe $\mathscr{F}$, con l'ulteriore ipotesi $f(1) = 0$. Infatti, per ogni f che verifichi la disuguaglianza scritta sopra, si può porre $\omega_f(x) = f(x^2) - 2f(x)$ e risulta $\omega_f(x) \geqq 0$ per $x \geqq 1$ oltre che $\omega_f \in \mathscr{G}$. Pertanto, da (8) si deduce che $f(x) \geqq$ $\geqq f'_+(1) \log x$ per ogni $x \geqq 1$.

Ancora, dalla formula (8) si possono ricavare disuguaglianze per le soluzioni di una equazione del tipo (7). Per esempio, data nella classe $\mathscr{F}$ l'equazione $f(x^2) = 2f(x) + (x-1)^2$, con un semplice calcolo si ottiene, applicando (8), $f(x) > f'_+(1) \log x + 1/2 \log^2 x$ per $x > 1$ (vale l'uguaglianza per $x = 1$).

5. Un'osservazione sull'equazione asintotica $f(x^2) - 2f(x) \to 0$

Ritorniamo all'equazione funzionale asintotica presentata all'inizio

$$f(x^2) - 2f(x) \to 0 \qquad \text{per } x \to +\infty, \tag{4}$$

dove supponiamo $f \in \mathscr{F}$.

Per ogni $\omega \in \mathscr{G}$ fissata con l'ulteriore proprietà $\omega(x) \to 0$ per $x \to +\infty$, l'equazione funzionale

$$f(x^2) = 2f(x) + \omega(x) \qquad (x > 0)$$

rientra in (4), e pertanto il Teorema (1) fornisce una famiglia di funzioni (8) che verificano anche (4). Al variare di ω nella classe $\mathscr{G}_0$ delle funzioni di $\mathscr{G}$ tali che $\omega(x) \to 0$ per $x \to +\infty$, si ottengono famiglie di soluzioni di (4). Circoscrivendo opportunamente sottoclassi di $\mathscr{G}_0$ entro le quali fissare ω, grazie alla conoscenza esplicita della dipendenza di f da ω espressa da (8), si potranno trovare classi di soluzioni di (4) dotate di determinate proprietà (per esempio, proprietà di carattere asintotico per $x \to +\infty$): basterà imporre opportune condizioni su ω che garantiscano alla funzione

$$\varphi(x) = \sum_{h=1}^{\infty} 2^h \omega(x^{1/2^h})$$

le proprietà richieste, tenendo presente, nell'imporre tali condizioni, che l'andamento della φ è strettamente legato all'andamento della ω nell'intorno di $x = 1$.

Non ci addentriamo qui in questi problemi, per passare piuttosto alla risoluzione di un altro tipo di equazioni funzionali, da cui potremo trarre varie conseguenze.

6. L'equazione funzionale $f(x^2) = 2f(x)\{1 + \sigma(x)\}$.

La considerazione dell'equazione asintotica della forma $f(x^2) \sim 2f(x)$ per $x \to 1$ conduce in modo naturale allo studio dell'equazione funzionale

$$f(x^2) = 2f(x)\{1 + \sigma(x)\} \qquad \text{per ogni} \qquad x > 0,$$

dove la funzione incognita f e la funzione nota σ si suppongono appartenenti a classi funzionali opportunamente fissate.

Denotando ancora con $\mathscr{F}$ la classe delle funzioni $f : [1, +\infty) \to \mathbf{R}$ che ammettono in $x = 1$ derivata destra finita $f'_+(1) \neq 0$, diciamo $\mathscr{S}$ la classe delle funzioni $\sigma : [1, +\infty) \to \mathbf{R}$ tali che $\sigma(x) \to \sigma(1) = 0$ per $x \to 1+$ e $\sigma(x) \neq -1$ per ogni $x > 1$.

Allora, con una tecnica dimostrativa analoga a quella seguita nel caso precedente, si perviene al seguente

TEOREMA 2. *L'equazione funzionale*

$$f(x^2) = 2f(x)\{1 + \sigma(x)\} \quad \textit{per ogni} \quad x \geqq 1 \tag{9}$$

dove $\sigma \in \mathscr{S}$ è una funzione assegnata, ammette nella classe $\mathscr{F}$ l'unica soluzione

$$f(x) = c \log x \cdot \prod_{h=1}^{\infty} \{1 + \sigma(x^{1/2^h})\} \qquad (x \geqq 1) \tag{10}$$

con $c = f'_+(1)$.

Per $\sigma(x) = 0$ identicamente, si ritrova la caratterizzazione del logaritmo già espressa nel Corollario 1. Inoltre si ottengono immediatamente le seguenti proposizioni:

COROLLARIO 2. *Il sistema di equazioni funzionali*

$$\begin{cases} f(x^2) = 2f(x)\{1 + \sigma(x)\} \\ \prod_{h=1}^{\infty} \{1 + \sigma(x^{1/2^h})\} = 1 \end{cases} \qquad (x \geqq 1),$$

dove $f \in \mathscr{F}$ e $\sigma \in \mathscr{S}$, ammette l'unica soluzione

$$f(x) = f'_+(1) \log x, \qquad \sigma(x) = 0 \quad \textit{per} \quad x \geqq 1.$$

COROLLARIO 3. *Nella classe $\mathscr{F}_0$ delle funzioni $f \in \mathscr{F}$ con $f(1) = 0$, $f(x) \neq 0$ per $x > 1$, risulta*

$$\prod_{h=1}^{\infty} \frac{f(x^{1/2^{h-1}})}{2f(x^{1/2^h})} = 1$$

se e soltanto se $f(x) = c \log x$, $c \neq 0$.

Queste ultime proposizioni assegnano condizioni necessarie e sufficienti, vincolanti la σ, per garantire come unica soluzione della (9) il logaritmo. Anche il Teorema 3 che segue rientra in tale ambito, ma viene presentato a parte perchè esso trova applicazione nello studio di un'altra equazione funzionale che vedremo fra poco.

TEOREMA 3. *Nella classe $\mathscr{F}$, l'equazione funzionale* (9) *con $\sigma \in \mathscr{S}$ ammette l'unica soluzione $f(x) = f'_+(1)$ log x se e soltanto se σ soddisfa l'equazione funzionale*

$$\sigma(x)\,\sigma(x^2) = -\{\sigma(x) + \sigma(x^2)\} \quad \textit{per ogni} \quad x \geqq 1. \tag{11}$$

Come conseguenza del Teorema 3 si stabilisce il seguente

LEMMA. *Nella classe delle funzioni* $\sigma : [1, +\infty) \to \mathbf{R}$ *continue in* $x = 1$, *le uniche soluzioni dell'equazione funzionale*

$$\sigma(x)\,\sigma(x^2) = c\,\{\sigma(x) + \sigma(x^2)\}, \quad c \neq 0, x \geqq 1 \tag{12}$$

sono $\sigma(x) = 0$, $\sigma(x) = 2c$ *per ogni* $x \geqq 1$.

Più in generale, si prova il seguente

TEOREMA 5. *Nella classe delle funzioni* $\sigma : [1, +\infty) \to \mathbf{R}$ *continue in* $x = 1$, *le uniche soluzioni dell'equazione funzionale*

$$\sigma(x)\,\sigma(x^2) + A\,\{\sigma(x) + \sigma(x^2)\} + B = 0 \qquad con \quad A^2 - B > 0, x \geqq 1$$

sono le funzioni costanti $\sigma(x) = -A - (A^2 - B)^{1/2}$, $\sigma(x) = -A + (A^2 - B)^{1/2}$.

Osservazione. Per quanto riguarda l'equazione funzionale asintotica $f(x^2) \sim 2f(x)$ per $x \to 1$, si possono ripetere considerazioni analoghe a quelle precedentemente accennate a proposito di $f(x^2) - 2f(x) \to 0$, in quanto classi di soluzioni della suddetta equazione si possono ottenere fissando σ nella classe $\mathcal{S}$ e considerando l'equazione $f(x^2) = 2f(x)\,\{1 + \sigma(x)\}$: in virtù della formula (10) le proprietà della soluzione f verranno a dipendere in forma esplicita da quelle di σ.

7. L'equazione funzionale $f(x^4) = 4\,f(x)$

I risultati appena ottenuti permettono tra l'altro di individuare una classe di funzioni f nella quale le equazioni funzionali

(i) $\qquad f(x^2) = 2f(x),$

(ii) $\qquad f(x^4) = 4f(x) \qquad (x > 0)$

risultano equivalenti fra loro.

Evidentemente (i) implica (ii) in qualunque classe funzionale, mentre l'implicazione inversa non è garantita in generale (per esempio, una funzione f che verifica (ii) ma non (i) è la seguente: $f(x) = \log x$ per ogni $x > 0$ con $x \neq 2^{4^n}, x \neq 2^{1/4^n}$; $f(2^{4^n}) = 4^n \log 3, f(2^{1/4^n}) = 4^{-n} \log 3$ ($n = 0, 1, 2, 3, \ldots$)).

Si noti che questo non accade per le equazioni in più variabili indipendenti. Infatti, se in luogo di (i), (ii) consideriamo le corrispondenti equazioni in più variabili

(i)' $\qquad f(xy) = f(x) + f(y) \qquad x > 0, \quad y > 0$

(ii)' $$f(xyzt) = f(x) + f(y) + f(z) + f(t), \qquad x, y, z, t > 0$$

si verifica facilmente che sussiste la doppia implicazione (i)' $\Leftrightarrow$ (ii)'.

Ritornando alle equazioni in una sola variabile, osserviamo preliminarmente che il Teorema 3 assicura tra l'altro che il sistema di equazioni funzionali

(13) $$\begin{cases} f(x^2) = 2f(x)\,\{1 + \sigma(x)\} \\ \sigma(x)\,\sigma(x^2) = -\{\sigma(x) + \sigma(x^2)\} \end{cases} \qquad (x \geqq 1)$$

nelle funzioni incognite $f \in \mathscr{F}, \sigma \in \mathscr{S}$, ammette l'unica soluzione $f(x) = f'_+(1) \log x$, $\sigma(x) = 0$ per ogni $x \geqq 1$. Se si suppone inoltre $f(x) \neq 0$ per ogni $x > 1$, espressa σ in funzione di f, dalla seconda equazione in (13) si deduce (ii); e viceversa, se $f \in$ $\in \mathscr{F}$ con $f(x) \neq 0$ per $x > 1$ verifica (ii), ponendo, per definizione,

$$\sigma(x) = \frac{f(x^2)}{2f(x)} - 1 \qquad \text{per} \qquad x > 1, \qquad \sigma(1) = 0,$$

si ritrova che f, σ sono soluzioni del sistema (13). Pertanto risulta provato il

TEOREMA 4. *Nella classe* $\mathscr{F}_0$ *delle funzioni* $f \in \mathscr{F}$ *con* $f(x) \neq 0$ *per ogni* $x > 1$, *l'equazione funzionale*

$$f(x^4) = 4f(x) \qquad (x > 0)$$

ammette l'unica soluzione $f(x) = f'_+(1) \log x$.

Dall'equivalenza così stabilita fra (i) e (ii) nella classe $\mathscr{F}_0$, si deduce una ulteriore caratterizzazione del logaritmo:

TEOREMA 4bis. $f(x) = \log x$ *è l'unica soluzione dell'equazione funzionale*

$$f(x^4) = 4f(x) \qquad (x > 0)$$

con le seguenti proprietà: $f'(1) = 1$, $f(x) \neq 0$ *per ogni* $x \neq 1$.

8. L'equazione $f(x^2) = 2f(x)$ su dominio ristretto

Per concludere, segnaliamo che quanto precede può trovare una applicazione anche nell'ambito delle equazioni funzionali su dominio ristretto. Infatti, data l'equazione funzionale $f(x^2) = 2f(x)$ sul dominio ristretto $1 \leqq x < a^2$, poniamo l'equazione stessa nella forma

$$f(x^2) = 2f(x)\,\{1 + \sigma(x)\}$$

(oppure $f(x^2) = 2f(x) + \omega(x)$) con $\sigma(x) \equiv 0$ su $1 \leqq x < a^2$. Allora, dai risultati precedenti si deduce immediatamente l'espressione della soluzione $f(x)$ in un intorno destro di $x = 1$. Precisamente sussiste il seguente

TEOREMA 6. *Se f soddisfa l'equazione funzionale*

$$f(x^2) = 2f(x) \qquad \textit{per ogni} \qquad x \in [1, a^2)$$

ed esiste $f'_+(1) \neq 0$, *allora risulta*

$$f(x) = f'_+(1) \log x \qquad \textit{per ogni} \qquad x \in [1, a).$$

Infatti, fissata nella classe $\mathscr{S}$ precedentemente definita una funzione $\sigma_0(x)$ identicamente nulla su $1 \leqq x < a^2$, dal Teorema 2 si ha

$$f(x) = f'_+(1) \log x \cdot \prod_{h=1}^{\infty} \{1 + \sigma_0(x^{1/2^h})\},$$

da cui l'asserto per $1 \leqq x < a$.

BIBLIOGRAFIA

[1] FUBINI G., *Di una nuova successione di numeri*, Period. di Matem. *14* (1899), 147 - 149.
[2] SKOF F., *Su un'equazione funzionale asintotica* (in preparazione).

SILVIO NOCILLA

SULL'INTEGRAZIONE DELL'EQUAZIONE DI DUFFING E SUE ESTENSIONI

Introduzione.

Penso di rientrare nello spirito delle celebrazioni di Guido Fubini se, in armonia con l'esigenza tanto sentita dal Maestro, esporrò anzitutto i problemi fisici che stanno alla base dei problemi matematici di cui mi occupo. Voglio inoltre considerare come un omaggio alla memoria di Lui gli studi di cui tratterò, che trovano il loro basilare supporto matematico nelle equazioni integrali, di cui pure il Fubini si occupò a fondo nelle sue opere.

Consideriamo dunque i sistemi dinamici vibranti schematizzati in fig. 1, con caratteristica di forza non lineare.

Questi quattro casi danno luogo rispettivamente alle seguenti equazioni e sistemi di equazioni differenziali:

$$m\ddot{x} + C\dot{x} + Kx + K'x^3 = F_0 \sin \Omega t \tag{1}$$

$$m\ddot{x} + C\dot{x} + Kx + K'x^3 = mh_0 \Omega^2 \sin \Omega t \tag{2}$$

Eq. di *Duffing*

$$\begin{cases} \ddot{x} + \left(\dfrac{1}{m_1} + \dfrac{1}{m_2}\right)(F(x) + C\dot{x}) + \dfrac{K_1}{m_1}(x + y) = \dfrac{F_1}{m_1} \sin \Omega t \\ \ddot{y} - \dfrac{1}{m_2}(F(x) + C\dot{x}) = 0 \end{cases} \tag{3}$$

$$\begin{cases} \ddot{x} + \left(\dfrac{1}{m_1} + \dfrac{1}{m_2}\right)(F(x) + C\dot{x}) + \dfrac{K_1}{m_1}(x + y) = \dfrac{K_1}{m_1} h_0 \sin \Omega t \\ \ddot{y} - \dfrac{1}{m_2}(F(x) + C\dot{x}) = 0 \end{cases} \tag{4}$$

In (3) e (4) è:

$$F(x) = Kx + K'x^3; \qquad x = x_1 - x_2,\ y = x_2. \tag{5}$$
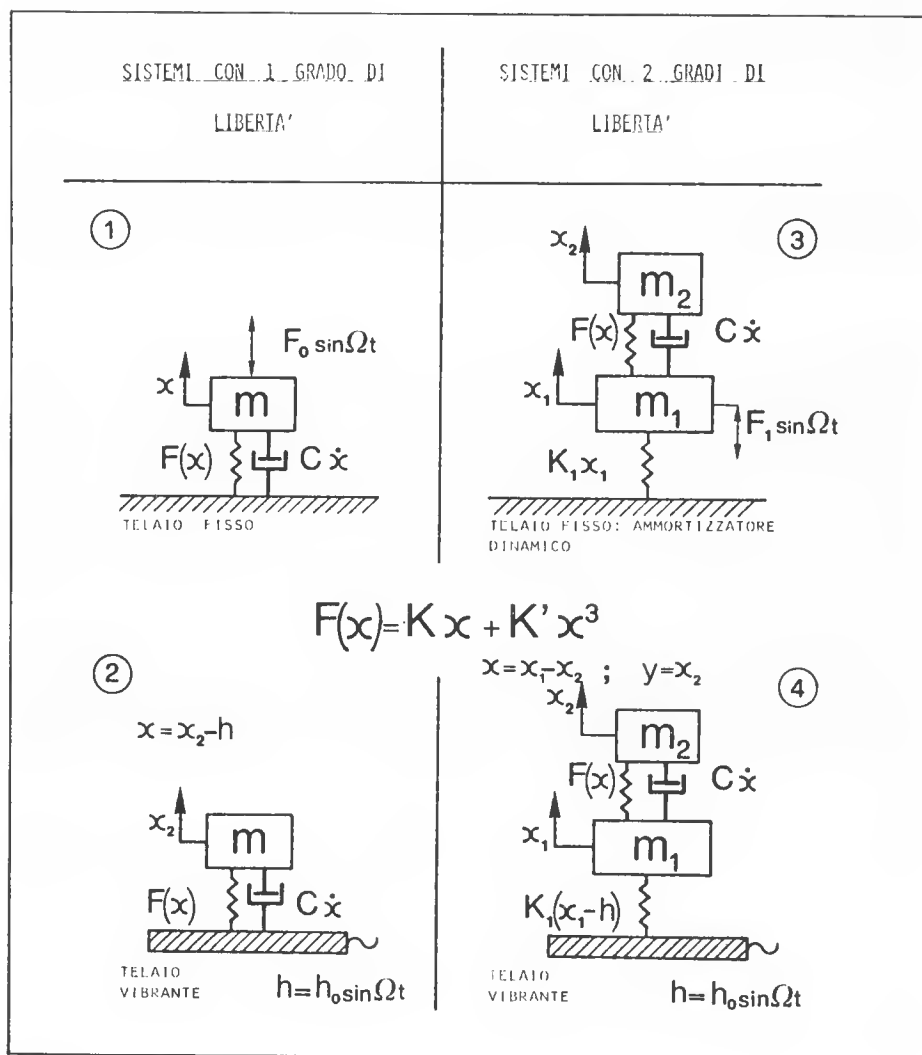
Figura 1.

Le prime due equazioni rientrano come casi particolari dell'equazione di Duffing con dissipazione viscosa, v. ad es. [1] e [2]:

$$\ddot{x} + c\dot{x} + k_1 x + k_3 x^3 = f_0 \sin \Omega t \tag{6}$$

con:

$$\left\{ \begin{array}{l} k_1 = K/m; \quad k_3 = K'/m \\ c = C/m \end{array} \right. \qquad f_0 = \begin{cases} F_0/m & \text{in (1)} \\ h_0 \Omega^2 & \text{in (2)} \end{cases} \tag{7}$$

mentre le (3) e (4) possono essere considerate come loro estensioni, v. ad es. [4]. Anche fra le (1) e (2) sussiste però una differenziazione molto importante, perché mentre nel caso (1) il coefficiente f_0 che compare nella (6) risulta *indipendente dalla pulsazione Ω della forzante*, nel caso (2) esso dipende anche dalla Ω. Questo fatto porta ad una differenziazione fondamentale nelle curve di risposta, che danno l'ampiezza x^* del moto periodico a regime in funzione appunto della Ω. Tale differenziazione è già presente nel caso lineare $K' = 0$ come appare dai ben noti diagrammi seguenti relativi al caso $c = 0$, fig. 2, v. ad es. [3].
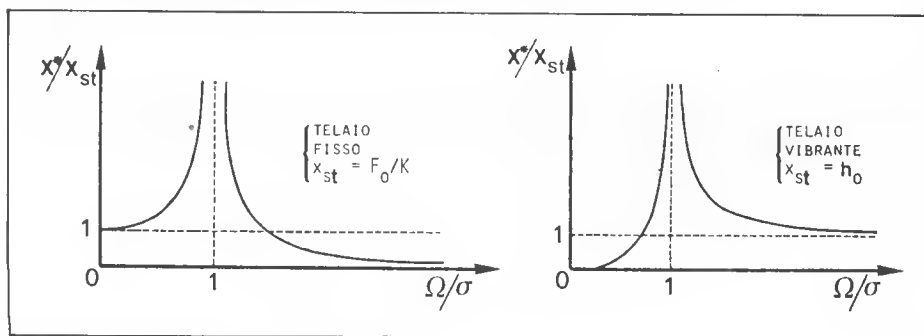
Figura 2. Caso lineare $K' = 0$; $\sigma = \sqrt{K/m}$.

Questa differenza si ripercuote anche in una effettiva complicazione del problema (2) rispetto al problema (1), qualora si adotti la metodologia che qui di seguito svilupperemo. Un sintomo eloquente di ciò ci pare il fatto che nella letteratura corrente, per quanto ci consti, il caso (2) non è trattato neppure nella prima approssimazione della forma d'onda sinusoidale. Per questi motivi riteniamo di poter considerare anche il caso (2) come una estensione dell'equazione di Duffing (6) nella sua accezione tradizionale. Ciò corrisponde ad una effettiva differenziazione della natura fisica dei due problemi. Il problema (4) poi si presenta particolarmente ricco di spunti inconsueti ed interessanti.

Nella presente esposizione ci occuperemo fondamentalmente del caso (1), dando solo un cenno agli altri casi, in vista di estendere ad essi le metodologie qui impiegate.

1. Studio dell'equazione di Duffing senza dissipazione.

$$\ddot{x} + k_1 x + k_3 x^3 = f_0 \sin \Omega t \qquad (k_1, k_3 > 0). \tag{8}$$

Conviene premettere lo studio del caso autonomo $f_0 = 0$. Moltiplicando la (8) per $\dot{x}$ ed integrando rispetto al tempo si ottiene l'integrale primo dell'energia cinetica:

(9) $$\frac{1}{2}\dot{x}^2 + \frac{k_1}{2}x^2 + \frac{k_3}{4}x^4 = E \equiv \frac{k_1}{2}x^{*2} + \frac{k_3}{4}x^{*4}$$

avendo indicato con x^* il valore di x all'istante in cui è $\dot{x} = 0$. Sul piano delle fasi la (9) corrisponde ad una curva chiusa, che rappresenta un moto periodico. L'equazione oraria si ottiene da:

(10) $$t = \tilde{t} + \int_0^x \frac{dx'}{\sqrt{(x^{*2} - x'^2)\left[k_1 + \frac{1}{2}k_3(x^{*2} + x'^2)\right]}}$$

con $\tilde{t}$ costante arbitraria. Calcolando l'integrale per sostituzione otteniamo il risultato finale nella seguente *forma parametrica.*

(11) $$\begin{cases} x = x^* \sin\tau \\ t = \tilde{t} + \dfrac{1/\sqrt{k_1}}{\sqrt{1+\eta}}[\mathbf{K}(k) - F(\pi/2 - \tau; k)] \end{cases}$$

con:

(12) $$\eta = k_3 x^{*2}/k_1; \qquad k = \sqrt{\frac{\eta/2}{1+\eta}}$$

con $\mathbf{K}(k)$ ed $F(\pi/2 - \tau; k)$ integrali ellittici completo ed incompleto di 1° specie, di modulo k. Il periodo vale:

(13) $$\mathcal{T}_0 = \frac{\pi}{2}\sqrt{k_1}\,\frac{\sqrt{1+\eta}}{\mathbf{K}(k)}.$$

Questo classico risultato suggerisce una metodologia per lo studio del *caso autonomo* $f_0 \neq 0$, consistente nel cercare ancora la soluzione in una forma parametrica del tipo (11). E' però necessario premettere le seguenti considerazioni. Mentre nel caso autonomo la soluzione della (8) è *sempre periodica*, con periodo (13), nel caso non autonomo bisogna distinguere tra:

a) soluzioni periodiche,

b) soluzioni corrispondenti a dati iniziali arbitrari, ossia integrale generale.

Le soluzioni periodiche a loro volta si distinguono in *armoniche, sub-armoniche e super-armoniche*, rispettivamente con periodo *eguale, multiplo o sottomultiplo del periodo della forzante*:

(14) $$\mathcal{T} = 2\pi/\Omega.$$

Ed infine in soluzioni *monooscillanti*, tali cioè da presentare in ogni periodo un tratto crescente ed un tratto decrescente, e *plurioscillanti*, tali cioè da presentare più oscillazioni in un periodo, v. fig. 3. Queste considerazioni si ricollegano ad esempio al contenuto dei lavori di Schmitt e Brzezinski [5], e di Schmitt e Mazzanti [6], dedicate alla ricerca di soluzioni periodiche in senso generale.

E' importante osservare che anche l'integrale generale può essere riguardato, come i casi precedenti, come una *successione di semionde alternativamente crescenti e decrescenti*, salvo che non presenta, in generale, nessuna proprietà di periodicità, v. fig. 4.
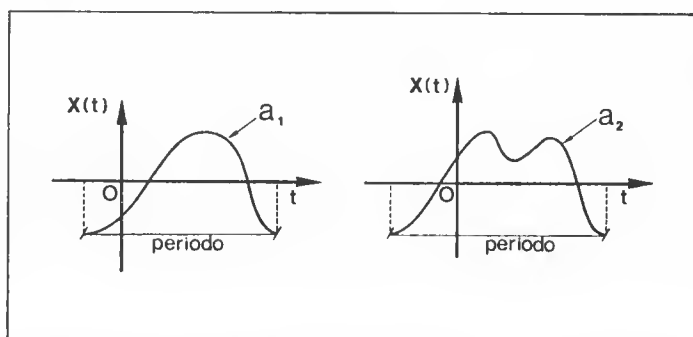
Figura 3. a_1) Onda periodica monooscillante; a_2) onda periodica plurioscillante.
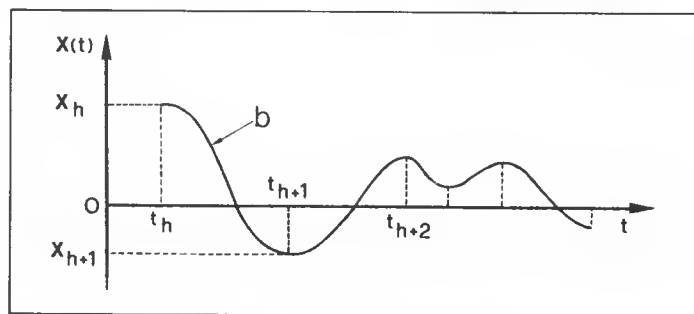
Figura 4. b) Integrale generale; t_h, x_h arbitrari, $\dot{x}_h = 0$.

Queste osservazioni suggeriscono un punto di partenza comune per lo studio di tutti i casi a_1) a_2) e b), consistente nel calcolare anzitutto la soluzione della (8) in un *intervallo di monotonia*, e cioè con condizioni iniziali del tipo:

(14) $$\text{per } t = t_h : x = x_h, \quad \dot{x} = 0 \qquad (h = 0, 1, 2, 3, \ldots)$$

e fino al valore t_{h+1} in cui di nuovo sia $\dot{x} = 0$. E' questa la linea base su cui si innesta la metodologia che svilupperemo.

2. Le soluzioni periodiche armoniche monooscillanti.

In analogia alla forma parametrica (11) nel caso non autonomo cercheremo per la soluzione una rappresentazione in forma parametrica del tipo:

$$(15)\qquad \begin{cases} x = x^* \sin \tau & (x^* > 0) \\ \Omega t = \tau + \vartheta + \Phi(\tau), \quad \text{con} & \Phi(\tau) = \displaystyle\int_{-\pi/2}^{\tau} \varphi(s)\, ds \end{cases}$$

dove x^* e ϑ sono due costanti da determinarsi: si dimostra che per $c = 0$, cioè in assenza di dissipazione, ϑ può assumere solo i valori 0 e π; τ è la nuova variabile indipendente, e $\varphi(\tau)$ la nuova funzione incognita in luogo della $x(t)$, avente significato di «funzione di forma» dell'onda cercata. In base ad alcune trasformazioni e ad una discussione che qui non possiamo riportare, (verranno riportate in una prossima Memoria [13] della nostra Accademia, in cui le presenti considerazioni verranno sviluppate in dettaglio) il problema viene ricondotto alla soluzione della seguente equazione integrale nell'incognita $\varphi(\tau)$:

$$(16)\qquad \varphi(\tau) = g(\tau) + M(\varphi, \tau) - \bar{M}(\varphi)$$

con:

$$(17)\qquad \begin{cases} g(\tau) = g_2 \cos 2\tau \\ M(\varphi, \tau) = g\varphi + a_1 Z - a_2 V + a_3 U + N \\ \bar{M} = \dfrac{1}{\pi} \displaystyle\int_{-\pi/2}^{\pi/2} M(\varphi, \tau)\, d\tau \end{cases}$$

involgente le seguenti costanti dipendenti da $\eta = k_3 x^{*2}/k_1$, v. (12), e da $\cos \vartheta$:

$$(18)\qquad \begin{cases} a_0 = 1 + \dfrac{5}{6}\eta - \sqrt{f_0/\eta}\cos\vartheta \\ a_1 = \left(1 + \dfrac{3}{4}\eta\right)/a_0 \\ a_2 = \dfrac{1}{4}\eta/a_0; \quad g_2 = \dfrac{1}{6}\eta/a_0 = \dfrac{2}{3}a_2 \\ a_3 = -\sqrt{f_0/\eta}\cos\vartheta/a_0 \end{cases}$$

con:

(19) $$\bar{f_0} = f_0^2 \, k_3 / k_1^3 .$$

Coi simboli Z, V, U ed N abbiamo indicato quattro operatori su φ, di cui i primi tre lineari e l'ultimo non lineare, ossia:

(20) $$\begin{cases} Z(\varphi, \tau) = \dfrac{1}{\cos \tau} \displaystyle\int_{-\pi/2}^{\tau} \sin s \cdot \varphi(s) \, ds \\ U(\varphi, \tau) = \operatorname{tg} \tau \displaystyle\int_{-\pi/2}^{\tau} \varphi(s) \, ds; \quad V(\varphi, \tau) = \dfrac{1}{\cos \tau} \displaystyle\int_{-\pi/2}^{\tau} \sin 3s \, \varphi(s) \, ds \end{cases}$$

(21) $$\begin{cases} N(\varphi, \tau) = a_1 \varphi Z - a_2 \varphi V + a_3 \varphi U + a_3 (Q + \varphi Q - US - \varphi US) \\ Q = 1 - \cos \Phi; \quad S = 1 - \sin \Phi / \Phi \end{cases}$$

La funzione incognita $\varphi(\tau)$ deve inoltre soddisfare alle condizioni accessorie (v. [7]):

(22) $$\begin{cases} \varphi(\tau) > -1 & \\ \varphi(\tau + \pi) = \varphi(\tau) & \text{periodo } \pi \text{ in } \tau \\ \varphi(-\tau) = \varphi(\tau) & \text{parità in } \tau \\ \displaystyle\int_{-\pi/2}^{\pi/2} \varphi(\tau) \, d\tau = 0 & \text{valor medio nullo in } I \equiv [-\pi/2, \pi/2] \end{cases}$$

che risultano automaticamente soddisfatte, a parte la prima, se la $\varphi(\tau)$ è del tipo:

(23) $$\varphi(\tau) = \sum_{n=1}^{\infty} b_{2n} \cos 2n \, \tau$$

con b_{2n} costanti da determinaris. I coefficienti (18) hanno in funzione di η l'andamento indicato in figura 5, per $\bar{f_0} = 1$ e per i due casi $\vartheta = 0$ e $\vartheta = \pi$. Appare chiara la sostanziale differenza tra questi due casi.

L'equazione integrale ora presentata è caratterizzata dal fatto che:

– è *non-lineare* per via dell'operatore N,
– è *singolare* per via del divisore $\cos \tau$ nei vari operatori,
– contiene anche il *valor medio* $\bar{M}$ dell'operatore M.

E' fondamentale però l'osservazione che, nonostante i divisori $\cos \tau$, tutti gli
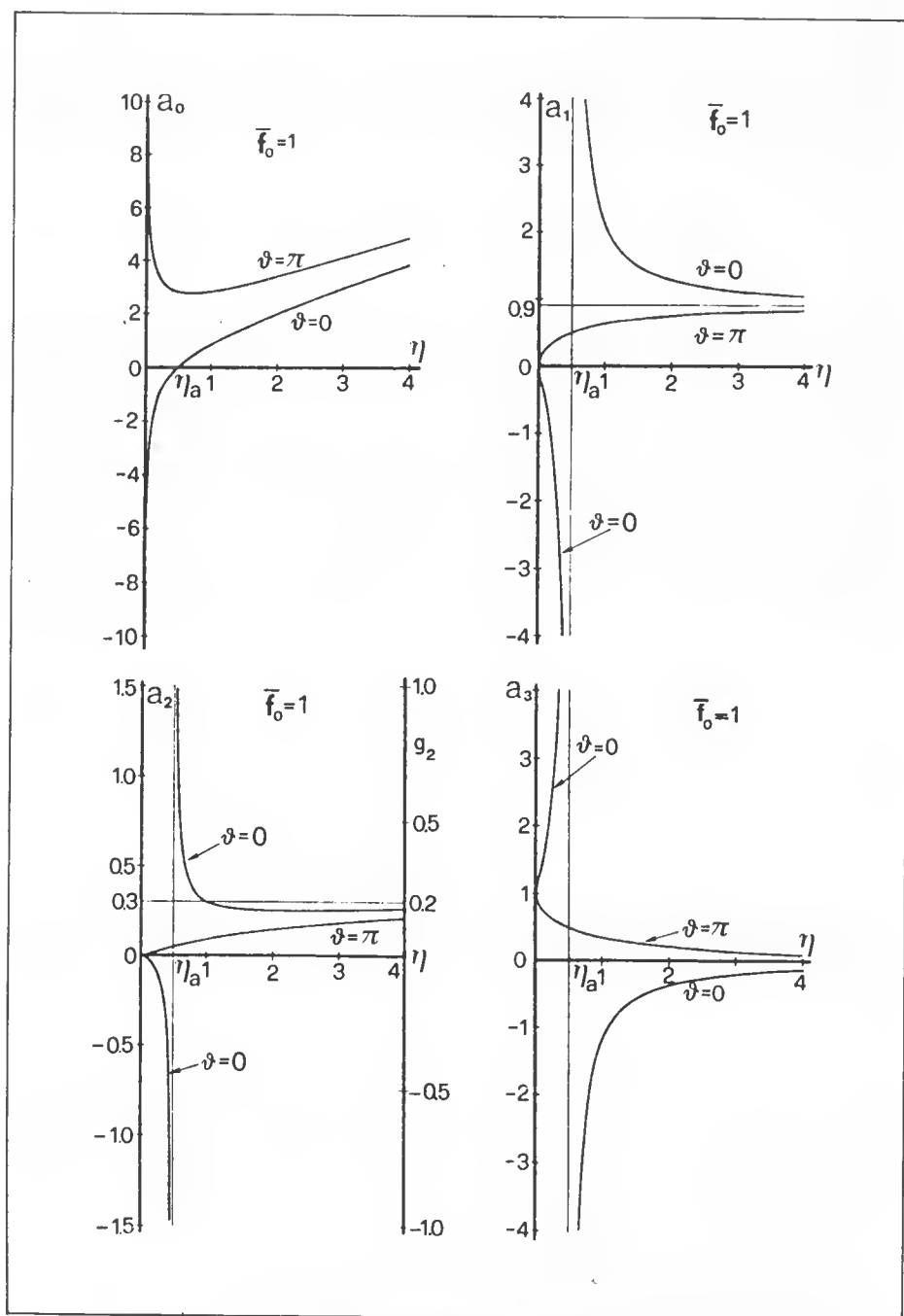
Figura 5. Le costanti a_0, a_1, a_2, a_3, g_2 date dalle (18), in funzione di η, per $\bar{f}_0 = 1$, e per $\vartheta = 0$ e π.

operatori Z, V, U ed N *risultano regolari per* $\tau \in I \equiv [-\pi/2, \pi/2]$ *se applicati a funzioni* $\varphi(\tau)$ *del tipo (23)*, purché naturalmente le varie serie indicate risultino convergenti. Riguardo poi al *tipo di convergenza* da richiedere alla serie (23), esso è condizionato dal fatto che sarà nostro intento ricondurci alla applicazione di un teorema di punto fisso in uno spazio di Banach. Si presenta allora anzitutto il problema della scelta di una *norma idonea*. Si sono rilevate consone al problema presente le norme seguenti:

$$\|\varphi\|_c = \operatorname*{Max}_{\tau \in I} |\varphi(\tau)|; \qquad \|\varphi\|_a = \sum_{n=1}^{\infty} |b_{2n}|; \qquad \|\varphi\|_d = \sum_{n=1}^{\infty} n\,|b_{2n}|. \tag{24}$$

Uno studio preliminare relativo ad un modello semplificato dell'equazione integrale (16) fu già da noi sviluppato in [8] con la norma $\|\varphi\|_a$. Le maggiorazioni colà ottenute non sembrano però idonee alla applicazione al caso specifico con i valori numerici che i coefficienti g_2, a_1, a_2, a_3 assumono per $\eta \in R_+$. Risultati ancora peggiori si hanno con la norma $\|\varphi\|_c$. Abbiamo dunque adottato la norma $\|\varphi\|_d$, anche se tale scelta ha richiesto complicazioni di calcolo alquanto pesanti. Con tale norma è possibile pervenire ad una *dimostrazione costruttiva di esistenza ed unicità della soluzione per tutti i valori positivi di* η *se è* $\vartheta = \pi$, *e per una parte di tali valori di* η *se è* $\vartheta = 0$. La limitazione non sembra dovuta al procedimento seguito, ma alla natura intrinseca del problema fisico di partenza, che in certe condizioni *non* sembra ammettere soluzioni monooscillanti.

Concludiamo osservando che con questa metodologia il parametro $\xi = \Omega^2/k_1$ si calcola dopo aver risolto il problema, con η assegnato, mediante la formula:

$$\xi = a_0 - \frac{1}{6}\,\eta\overline{(\varphi \cos 2\tau)} - \left(1 + \frac{3}{4}\eta\right)\bar{Z} + \frac{1}{4}\eta\bar{V} + \sqrt{\bar{f}_0/\eta}\,\cos\vartheta \cdot \bar{U} + a_0\bar{N}. \tag{25}$$

dove $\bar{Z}$, $\bar{V}$, $\bar{U}$, $\bar{N}$ sono i valori medi di Z, V, U, N, vedi ultima delle (17).

3. Studio dell'equazione integrale (16).

Conviene anzitutto trattare il caso lineare che si ottiene trascurando l'operatore N. Ci limitiamo a riportare a titolo indicativo le maggiorazioni che si ottengono per $Z(\varphi)$ con le tre norme (24). Precisamente introducendo per brevità il simbolo di «parte oscillante» di una funzione periodica Z, ottenuta togliendo da questa il suo valor medio $\bar{Z}$ in I:

$$\tilde{Z} = Z - \bar{Z} \tag{26}$$

la $\tilde{Z}$ risulta del tipo (23), se il periodo iniziale era π, ed inoltre abbiamo:

$$(27)\qquad \begin{cases} \| \tilde{Z} \|_c \leqslant 2 \, \| \varphi \|_c \\ \| \tilde{Z} \|_a \leqslant \| \varphi \|_a \\ \| \tilde{Z} \|_d \leqslant \dfrac{1}{2} \, \| \varphi \|_d \end{cases}$$

Adottando la norma $\| \, \|_d$ si dimostra abbastanza facilmente che scritta la (16) linearizzata nel modo consueto:

$$(28)\qquad \varphi = \tilde{T}_l(\varphi)$$

con:

$$(29)\qquad \tilde{T}_l(\varphi) = g_2 \cos 2\tau + g_2(\varphi \cos 2\tau) + a_1 \tilde{Z} - a_2 \tilde{V} + a_3 \tilde{U}$$

e posto inoltre:

$$(30)\qquad \tilde{T}_l^* = \tilde{T}_l(\varphi^*), \qquad \text{con} \qquad \varphi^* = \sum_{n=1}^{\infty} b_{2n}^* \cos 2n\tau$$

risulta:

$$(31)\qquad \| \tilde{T}_l - \tilde{T}_l^* \|_d \leqslant K_l \, \| \varphi - \varphi^* \|_d$$

con:

$$(32)\qquad K_l = |g_2| + \frac{1}{2}|a_1| + \frac{3}{5}|a_2| + \frac{1}{2}|a_3| = \frac{1 + \dfrac{83}{60}\eta + \sqrt{\bar{f}_0/\eta}}{2|a_0|}$$

essendo a_0 dato dalla (18). I diagrammi di K_l in funzione di η per $\vartheta = 0$ e π sono riportati in fig. 6, in corrispondenza di $\bar{f}_0 = 1$.

Il valore di K_l risulta *minore di uno* nelle condizioni seguenti:

$$(33)\qquad \begin{array}{l} \text{se } \vartheta = \pi : \text{per tutti gli } \eta \in R_+ \\ \text{se } \vartheta = 0 : \text{per tutti gli } \eta \in R_+ \setminus I_{\eta_a} \end{array}$$

dove $I_{\eta_a} = [\eta_a', \eta_a'']$ è un certo intervallo contenente nel suo interno il valore η_a in corrispondenza del quale si annulla il coefficiente a_0; in base alla prima delle (18) esso soddisfa alla cubica:

$$(34)\qquad \eta_a \left(1 + \frac{5}{6}\eta_a\right)^2 = \bar{f}_0 \qquad (\eta_a > 0).$$

Il risultato è legato in modo essenziale alla scelta della norma $\| \, \|_d$. In queste
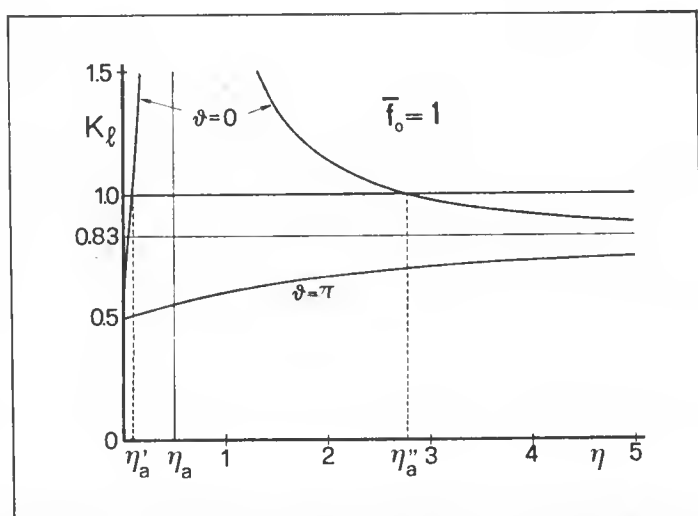
Figura 6. Il coefficiente K_l della contrazione, v. (31), relativo all'equazione linearizzata (28).

condizioni la soluzione esiste, è unica e calcolabile col consueto algoritmo iterativo:

(35) $$\varphi^{(h+1)} = \widetilde{T}_l(\varphi^{(h)}), \qquad \varphi^{(1)} = g_2 \cos 2\tau.$$

Passando all'equazione non lineare esatta (16), bisogna innanzitutto ricavare per l'operatore N delle maggiorazioni del tipo di quelle ricavate per gli operatori lineari Z, V, U. La cosa si presenta molto laboriosa, ma fattibile, e porta alla dimostrazione di una diseguaglianza del tipo (31), con un $K_n < 1$ in luogo di K_l, *purché però siano anche soddisfatte delle condizioni per la norma di* $g(\tau)$. Precisamente, detto $\widetilde{T}$ l'operatore non lineare esatto che compare nella (16):

(36) $$\widetilde{T} = g + \widetilde{M}, \qquad \text{da cui:} \qquad \varphi = \widetilde{T}(\varphi)$$

detti δ un valore maggiormente delle norme di φ e φ^*:

(37) $$\|\varphi\|_d \leqslant \delta; \qquad \|\varphi^*\|_d \leqslant \delta$$

e K_n la costante seguente:

(38) $$K_n = K_l + \delta[H + |a_3| \cdot G(\delta)]$$

con K_l dato dalla (32), $H > 0$ dato da:

(39) $$H = \frac{7}{3}|a_1| + \frac{12}{5}|a_2| + 2|a_3|$$

e $G(\delta)$ funzione analitica di δ:

(40) $$G(\delta) = \sum_{h=1}^{\infty} \gamma_h \delta^h$$

con γ_h determinati *coefficienti positivi non dipendenti da* η, *allora* risulta:

(41) $$\| \tilde{T} - \tilde{T}^* \|_d \leqslant K_n \| \varphi - \varphi^* \|_d .$$

In virtù del teorema di punto fisso [9], detta y la norma di g:

(42) $$y = \| g \|_d$$

se il sistema formato dalla (38) e dalla:

(43) $$y = \delta(1 - K_n)$$

ammette una soluzione reale e positiva in (δ, K_n) *con* $K_n < 1$, *allora l'equazione integrale (16) ammette una ed una sola soluzione* $\varphi(\tau)$. Tutto sta dunque a fare vedere che per $y > 0$ e $\delta > 0$, con il che dalla (43) risulta automaticamente $K_n < 1$, il sistema suddetto ammette soluzione reale in δ. Per questo eliminiamo K_n dal sistema (38) e (43), e otteniamo:

(44) $$-y + \delta(1 - K_l) = \delta^2[H + |a_3| G(\delta)] \equiv Y.$$

Sul piano (δ, Y), figura 7, si tratta di intersecare la retta r con la curva γ avente nell'origine un contatto del 2° ordine con l'asse δ e concavità verso l'alto. Ora è chiaro che *se è* $K_l < 1$ *la retta* r *ha coefficiente angolare positivo, e se inoltre* y *è*
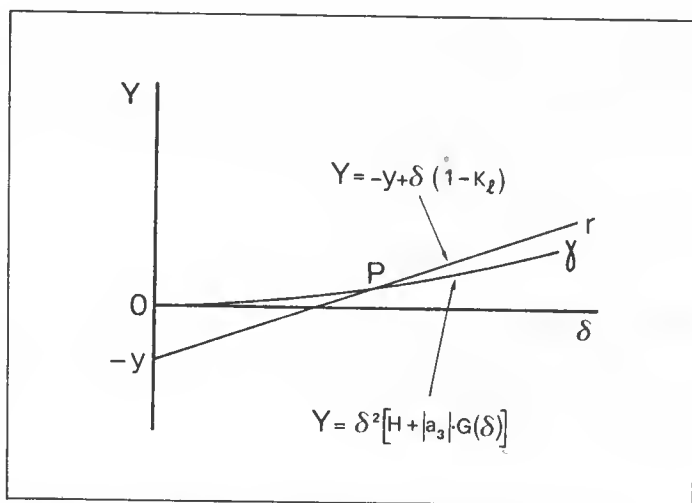
Figura 7. Rappresentazione grafica qualitativa della (44).

sufficientemente piccolo, allora esiste certamente un'intersezione reale P e il teorema di esistenza ed unicità per la $\varphi(\tau)$ risulta dimostrato.

All'atto pratico però la condizione che si ricava per y è molto severa, e tale che l'esistenza della soluzione risulta assicurata solo per piccoli valori di η. Questa difficoltà si supera *qualora si conosca una buona soluzione approssimata del problema*, il che può essere ottenuto con vari metodi (come ad esempio il bilancio armonico [10]). Infatti, detta $\varphi^{(1)}$ tale soluzione approssimata, si riconosce che la differenza:

$$\epsilon(\tau) = \varphi(\tau) - \varphi^{(1)}(\tau) \tag{45}$$

soddisfa all'equazione integrale:

$$\epsilon = R^{(1)} + \tilde{E}(\epsilon) \tag{46}$$

con

$$\begin{cases} R^{(1)} = + \tilde{T}(\varphi^{(1)}) - \varphi^{(1)} \\ \tilde{E}(\epsilon) = \tilde{T}(\varphi^{(1)} + \epsilon) - \tilde{T}(\varphi^{(1)}) \end{cases} \tag{47}$$

Ora risulta:

$$\tilde{E}(\epsilon) - \tilde{E}(\epsilon^*) = \tilde{T}(\varphi^{(1)} + \epsilon) - \tilde{T}(\varphi^{(1)} + \epsilon^*)$$

e quindi, in base alla (41):

$$\| \tilde{E}(\epsilon) - \tilde{E}(\epsilon^*) \|_d \leqslant K_n \| \epsilon - \epsilon^* \|_d \tag{48}$$

con K_n dato dalla (38). Le condizioni per l'esistenza ed unicità della $\epsilon(\tau)$ sono dunque le stesse ricavate per la $\varphi(\tau)$ *salvo la sostituzione della norma* $\| g \|_d$ *con la norma* $\| R^{(1)} \|_d$, la quale risulta, in base alla (47), tanto più piccola quanto migliore è la soluzione approssimata da cui si parte. *Basta dunque conoscere una soluzione approssimata $\varphi^{(1)}(\tau)$ sufficientemente buona, tale cioè che la norma del resto $\| R^{(1)} \|_d$ soddisfi alle condizioni richieste per la norma y della discussione precedente, per poter affermare l'esistenza ed unicità della soluzione esatta $\varphi(\tau)$, per tutti i valori (33) di η, per i quali risulta $K_l < 1$.*

4. Una soluzione di prima approssimazione.

Essa si può ottenere cercando la $\varphi(\tau)$ sotto la forma:

$$\varphi(\tau) = B \cos 2\tau. \tag{49}$$

Sostituendo nella (16), trascurando l'operatore non lineare N, e procedendo ad un bilancio armonico parziale, limitato cioè ai soli termini in cos 2τ, si ottiene:

(50) $$B = \frac{1}{8}\,\eta/b_0$$

con:

(51) $$b_0 = 1 + \frac{17}{20}\,\eta - \frac{9}{8}\sqrt{\bar{f}_0/\eta}\,\cos\vartheta.$$

La curva di risposta sul piano (ξ, η) è data dalla (25), che ora diventa:

(52) $$\xi = a_0 - \frac{1}{12}\,\eta\left(1 + \frac{11}{10}\,\eta - \frac{1}{4}\sqrt{\bar{f}_0/\eta}\,\cos\vartheta\right)/b_0$$

con a_0 dato dalla (18) e b_0 dalla (51). Queste formule, seppure approssimate, presentano il vantaggio di mostrare esplicitamente la dipendenza della soluzione dei parametri $(\bar{f}_0, \eta, \vartheta)$. Esse poi confermano il fatto, messo in luce nel n. 3 formule (33), che per $\vartheta = \pi$ la soluzione si ricava per tutti gli $\eta \in R_+$, mentre per $\vartheta = 0$ bisogna escludere un certo intervallo per la η. Nella teoria svolta in precedenza tale intervallo era quello in cui risultava $K_l > 1$, chiamato I_{η_a}, contenente nel suo interno il valore η_a soddisfacente alla (34), in cui si annulla a_0. Nel presente calcolo approssimato si deve escludere un intorno del valore $\eta = \eta_b$ in cui il denominatore b_0 si annulla e la soluzione perde significato. Questo η_b soddisfa alla cubica:

(53) $$\eta_b\left(1 + \frac{17}{20}\,\eta_b\right)^2 = \frac{81}{64}\,\bar{f}_0.$$

Così ad esempio per $\bar{f}_0 = 1$ si ha risolvendo le (34) e (53) rispettivamente:

(54) $$\eta_a = 0.49891; \qquad \eta_b = 0.57260.$$

In fig. 8 è riportato il valore di B in funzione di η, per $\bar{f}_0 = 1$ e per $\vartheta = 0$ e $\vartheta = \pi$. La parte tratteggiata va esclusa per quanto sopra detto.

In fig. 9 è riportata la curva di risposta (ξ, η), con le η limitate ai valori per cui è $\xi > 0$. Anche qui la parte tratteggiata deve essere esclusa. Si noti, per $\vartheta = 0$, l'asintoto orizzontale $\eta = \eta_b$, in prossimità del quale la soluzione approssimata non ha più significato. E' importante tuttavia rilevare che il ramo inferiore della curva interseca l'asse delle η in un punto A, in prossimità del quale si può congetturare che la soluzione ritorni ad avere significato, il che *significa che per ξ esista un intorno destro dello zero in cui nuovamente la soluzione periodica armonica mono-oscillante esiste ed è unica*. Questa congettura trova conferma nel fatto che per $\xi \to 0$ la $\varphi(\tau)$ *esatta* è stata calcolata esplicitamente in [11]. Il corrispondente valore esatto della η_A soddisfa alla:
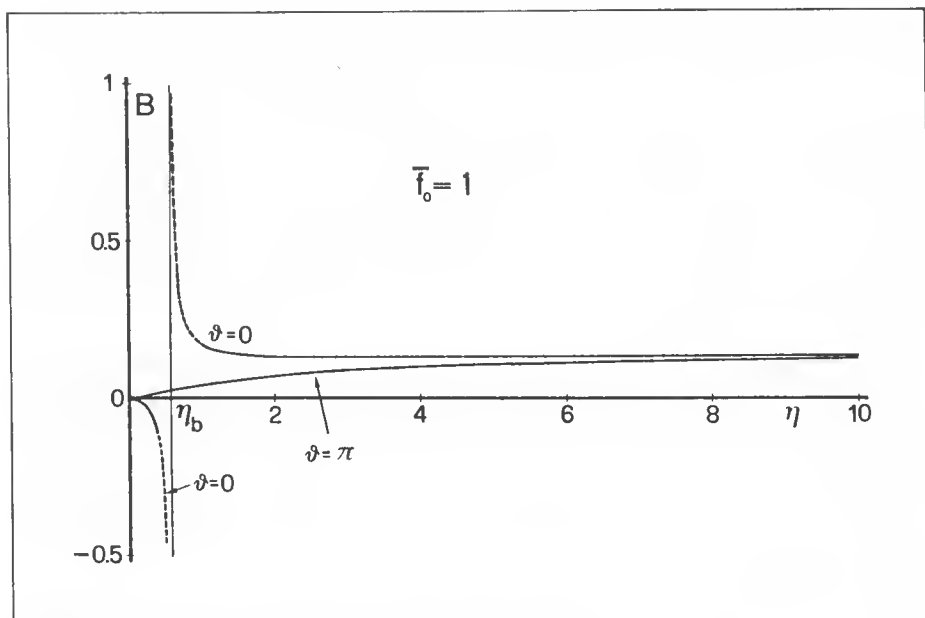
Figura 8. Il coefficiente B della soluzione approssimata (49).
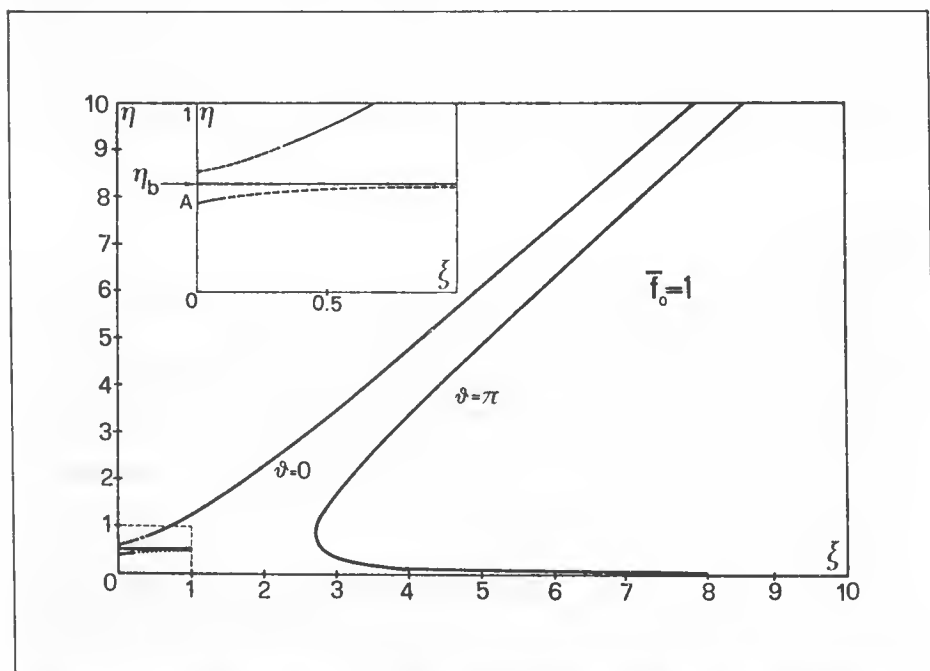
Figura 9. La curva di risposta (ξ, η) in corrispondenza della soluzione approssimata (49).

(55) $$\eta_A(1+\eta_A)^2 = \bar{f}_0.$$

I valori numerici di η_A per $\bar{f}_0 = 1$ e $\xi = 0$, con $\vartheta = 0$, sono:

$$(\eta_A)_{\text{esatto}} = 0.46557; \qquad (\eta_A)_{\substack{\text{presente}\\ \text{appross.}}} = 0.46956.$$

L'approssimazione appare molto buona.

Inoltre i diagrammi di fig. 6 mostrano che per $\eta \in [0, \eta'_a]$ risulta $K_l < 1$, e quindi appare possibile l'applicazione del teorema di punto fisso del n. 3, con conseguente esistenza ed unicità della soluzione. Bisognerebbe però anche dimostrare che in tale intervallo esistono valori di η in corrispondenza dei quali risulta $\xi > 0$.

Infine, recenti calcoli numerici, di cui è fatto cenno in [12], chiariscono lo speciale comportamento, non monoscillante, delle soluzioni periodiche armoniche dell'equazione di Duffing (8) per piccoli valori di ξ, in accordo con tutto quanto sopra detto.

Osserviamo infine che le stesse formule (49), . . . , (52) forniscono anche una soluzione approssimata del problema con telaio vibrante 2 . Basta in esse *sostituire in luogo di* $\bar{f}_0$ *il valore*:

(56) $$\xi^2 \bar{h}_0, \quad \text{con} \quad \bar{h}_0 = h_0^2 k_3/k_1.$$

In tal caso però la (52) non fornisce più in modo diretto la curva di risposta (ξ, η) perché anche il 2^ membro viene a dipendere dalla ξ. Sarebbe allora necessaria una ulteriore approfondita discussione che non è qui possibile effettuare.

La presente ricerca è stata effettuata nell'ambito delle attività del Gruppo Nazionale per la Fisica Matematica (G.N.F.M.) del Consiglio Nazionale delle Ricerche (C.N.R.).

BIBLIOGRAFIA.

[1] STOKER J. J., *Non linear vibrations in mechanical and electrical systems*, Chap. IV, Interscience Pubbl. Inc. (1950).

[2] NAYFEH A. H., MOOK D. T., *Non linear oscillations*, Chap. IV, J. Wiley and Sons (1979).

[3] DEN HARTOG J. P., *Mechanical vibrations*, Chap. 2, Mc Graw Hill (1956).

[4] NOCILLA S., *Vibrazioni forzate a regime di sistemi non lineari con due gradi di libertà*, Atti Convegno M. Panetti (1977) di questa Accademia, p. 309.

[5] SCHMITT B., BRZEZINSKI R., *Localisation numérique de solutions périodiques*, Atti Convegno Int. EQUADIFF (Firenze 1978), p. 99.

[6] SCHMITT B., MAZZANTI S., *Solutions périodiques symmetriques de l'equation de Duffing sans dissipations*, Prestampa (febbraio 1979).

[7] NOCILLA S., *A study on the forced vibrations of a class of non linear systems with application to the Duffing equation. Parte I: analytical treatment*, Meccanica (1976), p. 11.

[8] NOCILLA S., *A proposito di una equazione integrale non lineare con nucleo singolare e valor medio*, Riv. Mat. Univ. Parma (4) **5** (1979), p. 647.

[9] DIEUDONNÉ J., *Elements d'analyse*, vol. I, Chap. X, Gauthier Villard (1968).

[10] HAYASHI, *Non linear oscillations in physical systems*, Chap. 1, Mc Graw Hill (1964).
[11] NOCILLA S., *Periodical solutions of the Duffing Equation: some exact analytical results*, Atti Convegno Int. EQUADIFF (Firenze 1978), p. 523.
[12] NOCILLA S., *Vibrations, stability and general solution for the Duffing and other non linear equations*, «Meccanica» (settembre 1980), p. 131.
[13] NOCILLA S.*Sul calcolo delle soluzioni periodiche armoniche monoscillanti dell'equazione di Duffing senza dissipazione*, in corso di pubblicazione come Memoria di questa Accademia.

MARIA CINQUINI CIBRARIO

RISULTATI ANTICHI E RECENTI IN TEORIA DELLE CARATTERISTICHE

Sunto. *Sono brevemente esposti i risultati relativi alla teoria delle caratteristiche, ottenuti dall'A. in successive ricerche, nel campo delle soluzioni classiche di equazioni e sistemi di equazioni a derivate parziali di tipo iperbolico.*
Considerate poi soluzioni quasi ovunque di un sistema di tipo iperbolico di equazioni semilineari in due variabili indipendenti, sono esposti un teorema di unicità e un teorema di dipendenza continua dai dati relativi a un problema, che si presenta in teoria delle caratteristiche; tali teoremi sono stati dimostrati dall'A. in un lavoro recente.

1. Prima di entrare in argomento, desidero ricordare, molto brevemente, alcuni lavori giovanili di GUIDO FUBINI, che ritengo poco conosciuti e che riguardano equazioni a caratteristiche reali.

In una memoria del 1903 (1) è considerata l'equazione lineare

(a) $$s + a(x, y)\, p + b(x, y)\, q + c(x, y)\, z = \varphi(x, y)$$

e per essa è dimostrata esistenza ed unicità della soluzione del problema di DARBOUX, (trovare una soluzione della (a), che assume valori assegnati su due segmenti paralleli agli assi coordinati e uscenti da un punto dato), estendendo a tale equazione il procedimento utilizzato da CAUCHY per le equazioni differenziali ordinarie; sono ottenute anche espressioni della soluzione mediante serie uniformemente convergenti.

In un lavoro del 1905 (2), considerata l'equazione semilineare

(b) $$s = f(x, y, z, p, q)$$

è risolto per essa un problema più generale di quelli studiati a quella data; sono

(1) G. FUBINI, [1].

(2) G. FUBINI, [4].

poi fatte varie osservazioni di carattere critico.

Infine una memoria del 1904 e una nota del 1905 (3) sono dedicate allo studio di una classe di equazioni in più di due variabili indipendenti e, in generale, di ordine superiore al secondo.

2. Vengo ora all'argomento della presente conferenza, la scelta del quale è dovuta al fatto che le mie ricerche iniziali, relative alla teoria delle caratteristiche, si ricollegano ad alcuni suggerimenti, avuti da Guido Fubini in varie occasioni. Egli mi aveva consigliato, fin dai primissimi anni dopo la laurea, di leggere e di approfondire lavori di vari autori, dai quali pensava che io potessi, prima o poi, trarre argomento per ricerche originali. Tra l'altro avevo letto alcuni lavori di E. E. LEVI (4) e una memoria di H. LEWY (5), relativi alle equazioni non lineari di tipo iperbolico.

Nell'anno accademico 1937 - 38, l'ultimo che Guido Fubini trascorse a Torino, egli mi aveva segnalato un problema di carattere applicativo, nel quale compariva una equazione non lineare di tipo iperbolico; a distanza di oltre quarant'anni non mi è possibile precisare la questione.

In quegli anni io avevo in corso ricerche in altri campi, e, d'altra parte, i miei interessi sono sempre stati rivolti al lato teorico dell'Analisi Matematica.

3. Il suggerimento di Guido Fubini mi fu però di stimolo a rivolgermi, alcuni anni dopo, allo studio dell'equazione non lineare del secondo ordine di tipo iperbolico

$$F(x, y, z; p, q; r, s, t) = 0 \tag{I}$$

con

$$F_s^2 - 4F_rF_t > 0. \tag{1}$$

Dimostrai, in primo luogo, esistenza ed unicità della soluzione del problema di GOURSAT (6) per la (I), migliorando e semplificando i risultati ottenuti da E. E.

(3) G. FUBINI, [2], [3].

(4) E. E. LEVI, [1], [2], [3].

(5) H. LEWY, [1].

(6) M. CINQUINI CIBRARIO, [2], [3]; cfr. anche il volume M. CINQUINI CIBRARIO, S. CINQUINI, [1], Cap. III, §5, pp. 294 - 299; tale volume sarà citato in seguito come «*Monografia*». Alcuni tra gli argomenti trattati nella presente conferenza sono anche esposti in M. CINQUINI CIBRARIO, [15], [16].

LEVI (7) per tale problema. Il metodo della dimostrazione si ispirava in parte a quello tenuto da H. LEWY nella risoluzione del problema di CAUCHY per la (I) (8), ma utilizzava poi ulteriori artifici, piuttosto riposti, dovuti alla diversità del problema.

4. Mi rivolsi successivamente allo studio delle strisce caratteristiche della (I) nel campo delle funzioni di variabile reale.

Supposto, per fissare le idee, che in ogni punto del campo di definizione della funzione $F(x, y, z; p, q; r, s, t)$ sia

$$F_r(x, y, z; p, q; r, s, t) \neq 0, \tag{2}$$

l'equazione algebrica nell'incognita ρ

$$F_r(\ldots)\,\rho^2 - F_s(\ldots)\,\rho + F_t(\ldots) = 0 \tag{3}$$

ha, per ipotesi, due radici reali e distinte $\rho_1(\ldots)$, $\rho_2(\ldots)$ in ogni punto del campo di definizione della funzione $F(\ldots)$. Una striscia caratteristica della (I) (del secondo ordine) del sistema corrispondente, per esempio, alla radice $\rho_1(\ldots)$ della (3) è costituita da sette funzioni

$$\begin{cases} y = Y(x), \quad z = Z(x), \quad p = P(x), \quad q = Q(x), \\ r = R(x), \quad s = S(x), \quad t = T(x), \quad (x_1 \leqslant x \leqslant x_2) \end{cases} \tag{4}$$

di classe $C^{(1)}$, soddisfacenti le sei equazioni differenziali

$$\begin{cases} Y'(x) = \rho_1(x, Y(x), Z(x); P(x), Q(x); R(x), S(x), T(x)) \\ Z'(x) = P(x) + Q(x)\,\rho_1(\ldots) \\ P'(x) = R(x) + S(x)\,\rho_1(\ldots) \\ Q'(x) = S(x) + T(x)\,\rho_1(\ldots) \\ F_r(\ldots)\,R'(x) + (-F_r(\ldots)\,\rho_1(\ldots) + F_s(\ldots))\,S'(x) + \left(\dfrac{\mathrm{d}F}{\mathrm{d}x}\right) = 0 \\ F_r(\ldots)\,S'(x) + (-F_r(\ldots)\,\rho_1(\ldots) + F_s(\ldots))\,T'(x) + \left(\dfrac{\mathrm{d}F}{\mathrm{d}y}\right) = 0 \end{cases} \tag{5}$$

dove

(7) E. E. LEVI, [3].

(8) H. LEWY, [1].

$$\left(\frac{dF}{dx}\right) = F_x + F_z p + F_p r + F_q s; \qquad \left(\frac{dF}{dy}\right) = F_y + F_z q + F_p s + F_q t \tag{6}$$

e inoltre la

$$F(x, Y(x), Z(x); P(x), Q(x); R(x), S(x), T(x)) = 0 \tag{7}$$

in tutto il loro intervallo di definizione (9).

Alla superficie integrale

$$z = z(x, y), \qquad ((x, y) \in \delta) \tag{8}$$

della (I) appartiene la striscia caratteristica (4), se al campo δ di definizione della funzione $z(x, y)$ appartiene un arco della curva $y = Y(x)$ e nei punti di tale arco valgono le

$$\begin{cases} z(x, Y(x)) = Z(x), p(x, Y(x)) = P(x), q(x, Y(x)) = Q(x), \\ r(x, Y(x)) = R(x), s(x, Y(x)) = S(x), t(x, Y(x)) = T(x). \end{cases} \tag{9}$$

5. Relativamente all'equazione (I) risolsi quello che ora è noto come problema di DARBOUX; nel caso dell'equazione non lineare (I) tale problema si presenta in forma un po' diversa rispetto allo stesso problema relativo all'equazione semilineare (b), e precisamente consiste nel ricercare un integrale della (I), al quale appartengono due strisce caratteristiche (del secondo ordine) assegnate, appartenenti ai due diversi sistemi e aventi un elemento (del secondo ordine) in comune.

Il risultato ottenuto mi permise di costruire una teoria delle strisce caratteristiche dell'equazione non lineare (I) nel campo delle sue soluzioni (8) di classe $C^{(3)}$ (10); anteriormente tale teoria, tranne un risultato molto parziale dovuto a E. E. LEVI (11), era stata sviluppata soltanto nel campo delle funzioni analitiche (12).

6. Nel caso dell'equazione quasi lineare del secondo ordine di tipo iperbolico

$$A(x, y, z; p, q)\, r + 2B(\ldots)\, s + C(\ldots)\, t = F(\ldots), \tag{II}$$

con

(9) E' sufficiente che la (7) sia soddisfatta in un punto soltanto dell'intervallo di definizione delle funzioni (4), perché essa sia soddisfatta in tutto l'intervallo; infatti dalle (5) segue $dF(\ldots) = 0$.

(10) M. CINQUINI CIBRARIO [2], [3]; cfr. anche «*Monografia*», Cap. III, §4 pp. 285 - 294.

(11) E. E. LEVI, [3], pp. 331 - 333.

(12) É. GOURSAT, [1], Tome I, Chap. IV, pp. 171 - 224.

(10) $$B^2(\ldots) - A(\ldots)\, C(\ldots) > 0,$$

supposto

(11) $$A(x, y, z; p, q) \neq 0,$$

l'equazione (3) diviene

(12) $$A(x, y, z; p, q)\, \rho^2 - 2B(\ldots)\, \rho + C(\ldots) = 0.$$

Indicate ancora con $\rho_1(\ldots)$, $\rho_2(\ldots)$ le sue radici reali e distinte in tutto il campo di definizione dei coefficienti, una striscia caratteristica del primo ordine, per esempio del sistema corrispondente alla radice $\rho_1(\ldots)$ della (12), è definita da quattro funzioni

(13) $$y = Y(x), \quad z = Z(x), \quad p = P(x), \quad q = Q(x), \qquad (x_1 \leqslant x \leqslant x_2),$$

di classe $C^{(1)}$, soddisfacenti le tre equazioni differenziali

(14) $$\begin{cases} Y'(x) = \rho_1(x, Y(x), Z(x); P(x), Q(x)) \\ Z'(x) = P(x) + Q(x)\, \rho_1(\ldots) \\ A(\ldots)\, P'(x) + (-A(\ldots)\, \rho_1(\ldots) + 2B(\ldots))\, Q'(x) = F(\ldots). \end{cases}$$

La teoria delle caratteristiche dell'equazione quasi lineare (II) era stata sviluppata da me nel campo delle sue soluzioni (8) di classe $C^{(2)}$.

7. Molti anni dopo M. G. CAZZANI NIERI (13) ha ripreso le ricerche relative al problema di DARBOUX e alla teoria delle caratteristiche per le equazioni (I) e (II), migliorando i miei risultati. Nel caso dell'equazione non lineare (I) il campo funzionale introdotto è quello delle soluzioni (8) di classe $C^{(2)}$ e con derivate seconde lipschitziane; tra le funzioni (4) $Y(x)$, $Z(x)$, $P(x)$, $Q(x)$ sono ancora supposte di classe $C^{(1)}$, mentre $R(x)$, $S(x)$, $T(x)$ sono supposte soltanto lipschitziane e soddisfacenti le ultime due tra le equazioni (5) soltanto quasi ovunque. Nel caso dell'equazione quasi lineare (II) il campo considerato è quello delle funzioni $z = z(x, y)$ di classe $C^{(1)}$ e con derivate prime lipschitziane, soddisfacenti l'equazione (II) soltanto quasi ovunque; tra le funzioni (13), $Y(x)$, $Z(x)$ sono supposte di classe $C^{(1)}$, mentre $P(x)$, $Q(x)$ sono supposte lipschitziane e soddisfacenti l'ultima delle (14) soltanto quasi ovunque.

8. Ritornando alle mie antiche ricerche, dopo l'equazione del secondo ordine presi in considerazione l'equazione di ordine n

---

(13) M. G. CAZZANI NIERI, [1], [2], [3].

$$\text{(III)} \qquad F(x, y, z; p_{1,0}, p_{0,1}; \ldots; p_{n,0}, \ldots, p_{0,n}) = 0$$

con

$$p_{r,s} = \frac{\partial^{r+s} z(x, y)}{\partial x^r \partial y^s}$$

supposta di tipo iperbolico, cioè tale che, posto

$$F_{r,s} = \frac{\partial F}{\partial p_{rs}}$$

e supposto $F_{n,0} \neq 0$, l'equazione

$$F_{n,0}\rho^n - F_{n-1,1}\rho^{n-1} + \ldots + (-1)^n F_{0,n} = 0$$

abbia n radici reali e distinte in ogni punto del campo di definizione della funzione $F(\ldots)$.

Anche per la (III) sviluppai la teoria delle strisce caratteristiche (che risultano di ordine n) nel campo delle funzioni di variabile reale con semplici ipotesi di derivabilità (14).

Non intendo soffermarmi sui risultati ottenuti; ricordo soltanto che per $n > 2$ il problema di DARBOUX (trovare una superficie integrale della (III), alla quale appartengono due strisce caratteristiche di ordine n, appartenenti a due differenti sistemi ed aventi un elemento di ordine n in comune) è in generale impossibile.

9. Successivamente presi in considerazione i sistemi (di tipo iperbolico) di equazioni a derivate parziali del primo ordine sia non lineari

$$\text{(IV)} \qquad F_i(x, y; z_1(x, y), \ldots, z_m(x, y); p_1(x, y), \ldots, p_m(x, y);$$
$$q_1(x, y), \ldots, q_m(x, y)) = 0, \qquad (i = 1, \ldots, m),$$

dove

$$p_i(x, y) = \frac{\partial z_i(x, y)}{\partial x}, \qquad q_i(x, y) = \frac{\partial z_i(x, y)}{\partial y}$$

che quasi lineari

---

(14) Per le ricerche relative alla (III) cfr. M. CINQUINI CIBRARIO, [5], [6], [7], [13], e anche «*Monografia*», Cap. VI, pp. 461 - 484.

(V)
$$\sum_{j=1}^{m} [a_{ij}(x, y; z_1(x, y), \ldots, z_m(x, y))\, p_j(x, y) + b_{ij}(\ldots)\; q_j(x, y)] =$$
$$= c_i(\ldots), \qquad (i = 1, \ldots, m),$$

per i quali risolsi il problema di CAUCHY (15) e sviluppai la teoria delle caratteristiche (16).

Mi soffermo sulla teoria delle caratteristiche del sistema quasi lineare (IV), perché in questo caso tale teoria è maggiormente intuitiva.

Supposto che in tutto il campo C di definizione dei coefficienti del sistema (V) sia

(15)
$$\det \| a_{ij}(x, y; z_1, \ldots, z_m) \| \neq 0,$$

il fatto che il sistema (V) sia di tipo iperbolico implica che, considerata l'equazione algebrica di grado m in ρ

(16)
$$\det \| a_{ij}(\ldots)\, \rho - b_{ij}(\ldots) \| = 0,$$

le sue radici, che sono dette *radici caratteristiche* del sistema (V), *siano tutte reali in ogni punto del campo C, e* inoltre che, *indicate con*

(17)
$$\rho = \rho_1(x, y; z_1, \ldots, z_m), \ldots, \rho = \rho_\mu(\ldots),$$

le sue radici distinte e con $\nu_1, \ldots, \nu_\mu$ *i loro rispettivi ordini di molteplicità* ($\nu_1 + \ldots + \nu_\mu = m$), *la molteplicità di ognuna di esse sia costante in tutto il campo C, e, ponendo* $\rho = \rho_r(\ldots)$, $(r = 1, \ldots, \mu)$ *nella matrice, che figura a primo membro della (16), la caratteristica di tale matrice sia* $m - \nu_r$ *e non più grande.*

E' noto che ogni punto del campo C appartiene a un campo, costituito di punti di C, nel quale il sistema può essere ricondotto, per via puramente algebrica, alla *forma caratteristica*

(VI)
$$\sum_{j=1}^{m} A_{ij}(x, y; z_1(x, y), \ldots, z_m(x, y))\, [p_j(x, y) + \rho_i(\ldots) q_j(x, y)] =$$
$$= f_i(\ldots), \qquad (i = 1, \ldots, m),$$

dove sono indicate con $\rho_1(\ldots), \ldots, \rho_m(\ldots)$ le radici caratteristiche, senza

---

(15) M. CINQUINI CIBRARIO [4], [8], [9], [10]; «*Monografia*», Cap. V, §2, pp. 395 - 425, §5, n. 21, pp. 449 - 453.

(16) M. CINQUINI CIBRARIO, [11], [12], [14]; «*Monografia*», Cap. V, §4, nn. 13 - 17, pp. 430 - 441.

preoccuparsi dei loro ordini di molteplicità; dalla (15) segue

(18) $$\det \| A_{ij}(x, y; z_1, \dots, z_m) \| \neq 0.$$

In una memoria recente [17] ho stabilito condizioni sufficienti perché il sistema (V) possa essere ricondotto alla forma caratteristica (VI) non solo localmente, ma nell'*intiero campo C di definizione dei suoi coefficienti.*

10. Per semplicità di trattazione, si assuma il sistema quasi lineare nella forma caratteristica (VI), e si consideri, p. es., la radice caratteristica $\rho_1(x, y; z_1, \dots, z_m)$; sia ν il suo ordine di molteplicità, così che sia

(19) $$\rho_1(\dots) = \rho_2(\dots) = \dots = \rho_\nu(\dots).$$

Una $(m+1)$-*pla* di funzioni di classe $C^{(1)}$

(20) $$y = Y(x), \quad z_1 = Z_1(x), \dots, z_m = Z_m(x), \qquad (x' \leqslant x \leqslant x'')$$

rappresenta, nello spazio a $m+2$ dimensioni delle variabili $(x, y, z_1, \dots, z_m)$, una curva caratteristica del sistema corrispondente alla radice caratteristica $\rho_1(\dots)$, se per $x' \leqslant x \leqslant x''$ valgono le

(21) $$\begin{cases} Y'(x) = \rho_1(x, Y(x); Z_1(x), \dots, Z_m(x)) \\ \displaystyle\sum_{j=1}^{m} A_{ij}(x, Y(x); Z_1(x), \dots, Z_m(x))\, Z_j'(x) = f_i(\dots), \end{cases}$$

$$(i = 1, \dots, \nu).$$

Le (21) costituiscono un sistema di $\nu + 1$ equazioni differenziali nelle $m+1$ funzioni (20); la determinazione di tutte le curve caratteristiche appartenenti al sistema relativo alla radice caratteristica $\rho_1(\dots)$ di molteplicità ν dipende da $m - \nu$ funzioni arbitrarie di classe $C^{(1)}$ (si possono dare ad arbitrio $m - \nu$ tra le $Z_j(x)$, $(j = 1, \dots, m)$) e da $\nu + 1$ costanti (i valori iniziali delle ulteriori $\nu + 1$ funzioni (20)).

Sia

(22) $$z = z_1(x, y), \dots, z_m = z_m(x, y), \qquad ((x, y) \in \delta),$$

con le $z_i(x, y)$ di classe $C^{(1)}$, un integrale del sistema (VI); alla superficie integrale di equazioni (22) appartiene la curva caratteristica (20), quando esiste un arco della curva $y = Y(x)$ appartenente al campo δ e nei punti di tale arco valgono le

---

[17] M. CINQUINI CIBRARIO, [18].

(23) $$z_i(x, Y(x)) = Z_i(x), \qquad (i = 1, \ldots, m).$$

In tale ipotesi, tenuto conto della prima delle (21), si vede immediatamente che le ulteriori ν equazioni (21) coincidono con le prime ν equazioni (VI), quando in esse si ponga $y = Y(x)$. Questa osservazione giustifica il nome di *sistema in forma caratteristica*, dato al sistema (VI).

D'altra parte, nota la superficie integrale (22) del sistema (VI), e supposto che la funzione $\rho_1(x, y; z_1, \ldots, z_m)$ sia continua nel complesso delle variabili e lipschitziana nel complesso delle $(y, z_1, \ldots, z_m)$, se la funzione $y = Y(x)$ soddisfa l'equazione differenziale

$$Y'(x) = \rho_1(x, Y(x); z_1(x, Y(x)), \ldots, z_m(x, Y(x))),$$

e si fanno poi le posizioni (23), si verifica immediatamente che le funzioni (20) così ottenute soddisfano le (21), e quindi rappresentano una curva caratteristica (del sistema relativo alla radice caratteristica $\rho_1(\ldots)$), appartenente alla superficie integrale (22). Per ogni punto di tale superficie passa dunque una e una sola curva caratteristica (del sistema relativo alla radice caratteristica $\rho_1(\ldots)$) appartenente alla superficie stessa.

Analoghe considerazioni valgono per le curve caratteristiche appartenenti ai sistemi relativi alle ulteriori radici caratteristiche $\rho_i \neq \rho_1$.

11. Data la curva caratteristica (20), esistono infinite superfici integrali del sistema (VI), a cui essa appartiene; inoltre se due superfici integrali hanno una curva in comune, questa è caratteristica per entrambe, così che le caratteristiche sono le sole curve, lungo cui si possono collegare con continuità due soluzioni distinte del sistema (VI).

Se oltre alla curva caratteristica (20) è assegnata un'altra curva caratteristica appartenente ad un sistema corrispondente ad una radice caratteristica $\rho_i \neq \rho_1$ e avente un punto in comune con la curva (20), si può pensare di proporre anche per il sistema (VI) il problema di DARBOUX: trovare una superficie integrale del sistema passante per le due curve caratteristiche date. Ebbene (analogamente a quanto è stato rilevato per la singola equazione (III) a derivate parziali di ordine $n > 2$) il problema di DARBOUX è in generale impossibile, tranne nel caso che le radici caratteristiche distinte siano soltanto due.

Tutti questi risultati, che per semplicità sono stati esposti nel caso del sistema quasi lineare ricondotto alla forma caratteristica (IV), valgono, come è evidente, per il sistema quasi lineare (V), supposto di tipo iperbolico. Tali risultati erano stati ottenuti da me molti anni fa; avevo così sviluppata una teoria compiuta dalle caratteristiche per il sistema (V), nel campo delle sue soluzioni classiche, con semplici ipotesi di derivabilità, ben precisate, relative ai coefficienti delle

equazioni del sistema e ai dati. Avevo poi anche sviluppata la teoria delle caratteristiche per il sistema di equazioni non lineari (IV) (18).

I risultati erano stati ottenuti «*in piccolo*», cioè in un intorno opportuno dei dati.

12. Per molti anni non mi sono più interessata di teoria delle caratteristiche; vi sono tornata recentemente.

Essendomi occupata a lungo della risoluzione del problema di CAUCHY per sistemi di equazioni a derivate parziali in due e in più variabili indipendenti nel campo delle soluzioni quasi ovunque, ho pensato qualche anno fa che una teoria delle caratteristiche potesse essere sviluppata anche nel campo delle soluzioni quasi ovunque, e che inoltre si potesse giungere a risultati «*in grande*».

Una prima ricerca, in questo ordine di idee, è contenuta in una memoria, uscita recentemente negli Annali di Matematica (19); in tale memoria ho considerato un sistema semilineare di tipo iperbolico, già ridotto in forma caratteristica

$$\text{(VII)} \qquad \sum_{j=1}^{m} A_{ij}(x,y)[p_j(x,y) + \rho_i(x,y)\, q_j(x,y)] =$$
$$= f_i(x,y; z_1(x,y), \ldots, z_m(x,y)), \qquad (i = 1, \ldots, m)$$

e ho dimostrato un teorema di unicità e un teorema di dipendenza continua dai dati della soluzione di un problema, che si presenta nella teoria delle caratteristiche.

Come soluzione, in senso generalizzato, del sistema (VII) è intesa una m-pla di funzioni

$$\text{(24)} \qquad z_1 = z_1(x,y), \ldots, z_m = z_m(x,y),$$

le quali sono lipschitziane nel complesso delle variabili nel proprio campo di definizione e soddisfano ivi quasi ovunque il sistema (VII).

13. Richiamo brevemente le ipotesi introdotte nella memoria, citata in (19); le funzioni $A_{ij}(x,y)$, $\rho_i(x,y)$, $(i, j = 1, \ldots, m)$ siano definite nel campo

$$D_\infty: \qquad -a_1 \leqslant x \leqslant a_2, \qquad (a_1 > 0, a_2 > 0), \qquad -\infty < y < +\infty;$$

sia in D_∞

---

(18) M. CINQUINI CIBRARIO, [14].

(19) M. CINQUINI CIBRARIO, [17].

(25) $$\det \| A_{ij}(x,y) \| = 1 .$$

Le $A_{ij}(x,y)$ siano lipschitziane nel complesso delle variabili (x,y); le $\rho_i(x,y)$ siano continue nel complesso delle variabili; in ogni punto del campo D_∞ esistano finite le derivate

$$\frac{\partial \rho_i(x,y)}{\partial y}, \qquad (i = 1, \ldots, m),$$

le quali, in corrispondenza ad ogni y reale siano quasi continue in x in $(-a_1, a_2)$, e, in corrispondenza ad ogni x di $(-a_1, a_2)$, siano continue in y; esistano due funzioni $M(x)$, $L(x)$, quasi continue, non negative ed integrabili (20) in $(-a_1, a_2)$, tali che, in corrispondenza a quasi tutti gli x di $(-a_1, a_2)$, sia

(26) $$| \rho_i(x,y) | \leqslant M(x), \qquad (i = 1, \ldots, m)$$

per tutti gli y reali, e

(27) $$| \rho_i(x,y) - \rho_i(x,\bar{y}) | \leqslant L(x) | y - \bar{y} |, \qquad (i = 1, \ldots, m),$$

per tutte le coppie $(y, \bar{y})$ di numeri reali. Le funzioni $f_i(x, y; z_1, \ldots, z_m)$ siano definite nel campo

C_∞: $$-a_1 \leqslant x \leqslant a_2, \ -\infty < y < +\infty, \ -\infty < z_1 < +\infty, \ldots, -\infty < z_m < +\infty,$$

e siano ivi continue nel complesso delle variabili; esista una *costante* L_1, tale che in ogni punto (x,y) del campo C_∞ sia

(28) $$| f_i(x, y; z_1, \ldots, z_m) - f_i(x, y; \bar{z}_1, \ldots, \bar{z}_m) | \leqslant$$
$$\leqslant L_1 \sum_{j=1}^{m} | z_j - \bar{z}_j |, \qquad (i = 1, \ldots, m),$$

per tutte le coppie di *m-ple* reali $(z_1, \ldots, z_m)$, $(\bar{z}_1, \ldots, \bar{z}_m)$. La radice caratteristica $\rho_1(x,y)$ abbia molteplicità ν, così che sia

(29) $$\rho_1(x,y) = \rho_2(x,y) = \ldots = \rho_\nu(x,y),$$

e si consideri la curva caratteristica, del sistema corrispondente alla radice $\rho_1(x,y)$, definita dalle

(30) $$y = \eta_1(x), \qquad z = Z_1(x), \ldots, z_m = Z_m(x), \qquad (-a_1 \leqslant x \leqslant a_2)$$

dove $\eta_1(x)$ è di classe $C^{(1)}$ in $(-a_1, a_2)$ e soddisfa in tutto $(-a_1, a_2)$ la

(20) L'integrabilità è intesa nel senso di LEBESGUE.

$$(31) \qquad \eta_1'(x) = \rho_1(x, \eta_1(x)),$$

le $Z_i(x)$, $(i = 1, \ldots, m)$ sono lipschitziane in $(-a_1, a_2)$ e soddisfano le

$$(32) \qquad \sum_{j=1}^{m} A_{ij}(x, \eta_1(x))\, Z_j'(x) = f_i(x, \eta_1(x); Z_1(x) \ldots, Z_m(x)), \qquad (i = 1, \ldots, \nu)$$

in quasi tutto $(-a_1, a_2)$.

Si consideri la curva

$$(33) \qquad y = \eta_2(x), \qquad (-a_1 \leqslant x \leqslant a_2)$$

con $\eta_2(x)$ di classe $C^{(1)}$, soddisfacente in tutto $(-a_1, a_2)$ la

$$(34) \qquad \eta_2'(x) = \rho_{\nu+1}(x, \eta_2(x)).$$

Le curve $y = \eta_1(x)$, $y = \eta_2(x)$, $(-a_1 \leqslant x \leqslant a_2)$ abbiano in comune un punto, interno all'intervallo $(-a_1, a_2)$; non è restrittivo assumere tale punto come origine delle coordinate, così che sia

$$(35) \qquad \eta_1(0) = \eta_2(0) = 0.$$

Siano assegnate le funzioni $b_{ij}(x)$, $(i = 1, \ldots, \nu;\ j = 1, \ldots, m)$, $G_i(x)$ $(i = 1, \ldots, \nu)$, continue nell'intervallo $(-a_1, a_2)$, soddisfacenti in tutto $(-a_1, a_2)$ la condizione

$$(36) \qquad \begin{vmatrix} b_{11}(x) & \ldots\ldots\ldots\ldots & b_{1m}(x) \\ \ldots & \ldots\ldots\ldots\ldots & \ldots \\ b_{\nu 1}(x) & \ldots\ldots\ldots\ldots & b_{\nu m}(x) \\ A_{\nu+1,1}(x, \eta_2(x)), & \ldots, & A_{\nu+1,m}(x, \eta_2(x)) \\ \ldots & \ldots\ldots\ldots\ldots & \ldots \\ A_{m,1}(x, \eta_2(x)), & \ldots, & A_{m,m}(x, \eta_2(x)) \end{vmatrix} \neq 0$$

e inoltre la

$$(37) \qquad \sum_{j=1}^{m} b_{ij}(0)\, Z_j(0) = G_i(0), \qquad (i = 1, \ldots, \nu).$$

Sotto queste ipotesi si dimostra (21) che in un campo Δ, che definiremo tra

(21) Cfr. M. CINQUINI CIBRARIO, [17], § 1, n. 2, pp. 180 - 202.

poco, non può esistere più di una *m-pla* di funzioni (24), le quali in Δ sono lipschitziane nel complesso delle variabili, soddisfano quasi ovunque il sistema (VII), e inoltre soddisfano identicamente in $(-a_1, a_2)$ le

(38) $$z_i(x, \eta_1(x)) = Z_i(x), \qquad (i = 1, \dots, m)$$

e le

(39) $$\sum_{j=1}^{m} b_{ij}(x)\, z_j(x, \eta_2(x)) = G_i(x), \qquad (i = 1, \dots, \nu)$$

nei punti della curva $y = \eta_2(x)$ appartenenti al campo Δ, cioè non può esistere più di una superficie integrale (in senso generalizzato) del sistema (VII), passante per la curva caratteristica (30), e soddisfacente le condizioni (39) (22).

14. Poiché, per ipotesi, $\rho_1(x, y)$, $\rho_{\nu+1}(x, y)$ sono distinte in tutto il campo D_∞, si supponga, per esempio, che sia sempre $\rho_1(x, y) < \rho_{\nu+1}(x, y)$; le curve $y = \eta_1(x)$, $y = \eta_2(x)$ si incrociano nell'origine. Si considerino le curve integrali dell'equazione differenziale

$$y'(x) = \rho_{\nu+1}(x, y(x)),$$

passanti per i punti $(-a_1, \eta_1(-a_1))$, $(a_2, \eta_1(a_2))$, e le curve integrali dell'equazione

$$y'(x) = \rho_1(x, y(x)),$$

passanti per i punti $(-a_1, \eta_2(-a_1))$, $(a_2, \eta_2(a_2))$. Tali curve (23) (cfr. fig 1) determinano un quadrilatero $\Delta^{[1]}$ a lati, in generale, curvilinei.

Se è $\rho_1(x, y) < \rho_{\nu+1}(x, y) \leqslant \rho_r(x, y)$, con $r = \nu + 2, \dots, m$, in tutto il campo D_∞, il campo Δ, in cui vale il teorema di unicità, coincide con il campo $\Delta^{[1]}$; se in D_∞ valgono altre relazioni di disuguaglianza tra $\rho_1(x, y)$, $\rho_{\nu+1}(x, y)$ e le altre radici caratteristiche, il campo Δ è parte del campo $\Delta^{[1]}$; in ogni caso il campo Δ è ben determinato ed è limitato da archi di curve integrali delle equazioni differenziali

(40) $$y'(x) = \rho_i(x, y(x)),$$

---

(22) Se, in particolare, in $(-a_1, a_2)$ è $b_{ij}(x) = 0$, $(i = 1, \dots, \nu; j = 1, \dots, m; i \neq j)$; $b_{ii}(x) = 1$, $(i = 1, \dots, \nu)$, le (39) divengono $z_i(x, \eta_2(x)) = G_i(x)$, $(i = 1, \dots, \nu)$, cioè nei punti della curva $y = \eta_2(x)$ sono prefissati valori di ν tra le funzioni (24).

(23) In figura le curve sono rappresentate da rette.
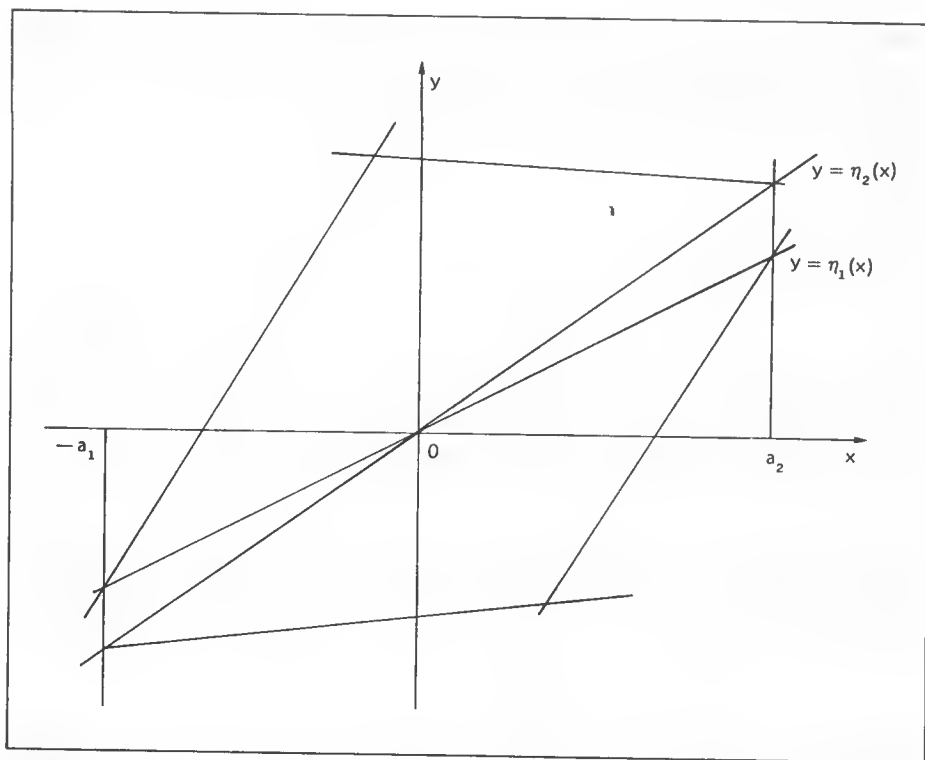
Figura 1

considerate per valori di i opportuni, compresi tra 1 e m, e da segmenti delle rette $x = -a_1, x = a_2$.

Per determinare il campo occorre studiare l'andamento in grande delle curve integrali delle equazioni (40) per i differenti valori $i = 1, \ldots, m$, e il loro comportamento reciproco; in tale studio mi sono valsa di alcuni risultati, che avevo conseguito in un mio antico lavoro del 1931 (24).

La dimostrazione del teorema di unicità si fonda, in primo luogo, su un cambiamento di variabili, nel quale vengono assunti come assi coordinati le curve $y = \eta_1(x)$, $y = \eta_2(x)$, $(-a_1 \leqslant x \leqslant a_2)$, in secondo luogo sulla costruzione di svariate relazioni integrali, alle quali soddisfa la soluzione (24) del sistema (VII), intesa in senso generalizzato, supposta definita nel campo Δ e soddisfacente le (38), (39); considerata in Δ un'altra soluzione (pure in senso generalizzato) del sistema (VII)

$$(24^*) \qquad z_1 = z_1^*(x, y), \ldots, z_m = z_m^*(x, y), \qquad ((x, y) \in \Delta)$$

(24) M. CINQUINI CIBRARIO, [1].

soddisfacente le

$$(38^*) \qquad z_i^*(x, \eta_1(x)) = Z_i(x), \qquad (i = 1, \dots, m)$$

identicamente in $(-a_1, a_2)$ e le

$$(39^*) \qquad \sum_{j=1}^{m} b_{ij}(x)\, z_j^*(x, \eta_2(x)) = G_i(x), \qquad (i = 1, \dots, \nu),$$

nei punti della curva $y = \eta_2(x)$, appartenenti al campo Δ, le funzioni (24*) soddisfano relazioni integrali del tutto analoghe. Tali relazioni permettono di maggiorare nel campo la

$$\sum_{j=1}^{m} |z_j(x, y) - z_j^*(x, y)|.$$

Si giunge così a dimostrare «*in grande*», e cioè nell'intiero campo Δ, il teorema di unicità.

Considerazioni analoghe valgono a provare un teorema di dipendenza continua della soluzione (in senso generalizzato) del sistema (VII) dai dati (le condizioni cioè (38) e (39)) (25).

15. Ho iniziato così un campo di ricerca, suscettibile di ulteriori sviluppi; i risultati, qui brevemente riassunti, relativi a un teorema di unicità e a un teorema di dipendenza continua dei dati della soluzione (in senso generalizzato) del sistema semilineare (VII) sono da estendere al sistema quasi lineare (V) (oppure (VI)); è pure da dimostrare (sempre nel campo delle soluzioni quasi ovunque) il teorema di esistenza corrispondente (26). In base a tali teoremi si potrebbe poi costruire una teoria delle caratteristiche, con le funzioni $Z_i(x)$, $(i = 1, \dots, m)$ soltanto lipschitziane, relativa a soluzioni quasi ovunque del sistema (V) (oppure (VI)).

Non ho parlato del significato fisico matematico delle caratteristiche; ciò perché i miei interessi non si sono mai rivolti a ricerche di carattere applicativo. D'altra parte l'interpretazione fisico matematica del concetto di caratteristica si trova già in trattati classici. In quanto a ricerche più recenti, ho avuto occasione di conoscerne alcune; mi limito a citare i lavori di G. BOILLAT (27), di

(25) M. CINQUINI CIBRARIO, [17], §2, n. 4, pp. 203 - 207.

(26) Nell'indirizzo classico tali teoremi sono dimostrati in M. CINQUINI CIBRARIO, [12].

(27) G. BOILLAT, [1].

M. BURNAT (28), A. JEFFREY (29) di A. JEFFREY e E. INAN (30), e infine una nota, molto recente, di A. DONATO (31).

BIBLIOGRAFIA.

BOILLAT G.

[1] *La propagation des ondes*, Gauthier-Villars, Paris 1966.

[2] *Chocs Caractéristiques*, Comptes Rendus Acad. Sc. de Paris, Sér. A-B 274 (1972), pp. A 1018 - A 1021.

BURNAT M.

[1] *The method of characteristics and Riemann invariants for multidimensional hyperbolic systems*, Sibirsk. Math. Ž., **11** (1970), pp. 279 - 309, tradotto in Siberian Math. Journal, **11** (1970), pp. 210 - 232.

CAZZANI NIERI M. G.

[1] *Un teorema di esistenza per una equazione a derivate parziali non lineare del secondo ordine*, Annali di Matematica, (IV) 67 (1965), pp. 1 - 32.

[2] *Un teorema di unicità per una equazione a derivate parziali non lineare del secondo ordine*, Annali di Matematica, (IV) 72 (1966), pp. 105 - 132.

[3] *Teoremi di esistenza e di unicità per una equazione quasi lineare del secondo ordine*, Rend. Istituto Lombardo, 99 (1965), pp. 441 - 456.

CINQUINI CIBRARIO M., CINQUINI S.

[1] *Equazioni a derivate parziali di tipo iperbolico*, Monografie Matematiche del Consiglio Nazionale delle Ricerche, n. 12, Ed. Cremonese, Roma, 1964.

CINQUINI CIBRARIO M.

[1] *Sui teoremi di esistenza e di unicità relativi ad alcune equazioni differenziali a derivate parziali*, Rend. R. Accademia dei Lincei, (VI) **13** (1931), Nota I, pp. 26 - 31, Nota II, pp. 115 - 118.

[2] *Sul problema di Goursat per le equazioni del tipo iperbolico non lineari*, Annali di Matematica, (IV) 21 (1942), pp. 189 - 229.

[3] *Sopra alcune questioni relative alle equazioni del tipo iperbolico non lineari*, Annali di Matematica, (IV) 23 (1944), pp. 1 - 23.

[4] *Un teorema di esistenza e di unicità per un sistema di equazioni alle derivate parziali*, Annali di Matematica, (IV) 24 (1945), pp. 157 - 175.

[5] *Sopra un nuovo problema ai limiti per un sistema di equazioni alle derivate parziali*, Rend. Istituto Lombardo, 79 (1945 - 46), pp. 103 - 111.

[6] *Sopra la teoria delle caratteristiche per le equazioni di ordine n di tipo iperbolico non lineari*, Rend. Istituto Lombardo, 79 (1945 - 46), pp. 147 - 154.

[7] *Teoria delle caratteristiche per equazioni non lineari di ordine n di tipo iperbolico*, Annali di Matematica, (IV) 26 (1947), pp. 95 - 117.

---

(28) M. BURNAT, [1].

(29) A. JEFFREY, [1], [2], [3], [4]; cfr. pure A. JEFFREY, T. TANIUTI, [1].

(30) A. JEFFREY, E. INAN, [1].

(31) A. DONATO, [1].

[8] *Sopra il problema di Cauchy per i sistemi di equazioni alle derivate parziali del primo ordine*, Rend. Seminario Matematico Università di Padova, anno XVII (1948), pp. 75 - 96.

[9] *Sopra i sistemi di equazioni alle derivate parziali a caratteristiche reali e multiple*, Rend. Accademia dei Lincei, (VIII) 4 (1948), pp. 682 - 688.

[10] *Sui sistemi di equazioni alle derivate parziali di ordine superiore*, Annali di Matematica, (IV) 29 (1949), pp. 147 - 161.

[11] *Sopra alcuni problemi preliminari*, Rend. Istituto Lombardo, 83 (1950), Nota I, pp. 49 - 59. Nota II, pp. 71 - 78.

[12] *Sopra la teoria delle caratteristiche per i sistemi di equazioni quasi-lineari alle derivate parziali del primo ordine*, Annali Scuola Normale Superiore di Pisa, (III) 3 (1949), pp. 161 - 197.

[13] *Alcuni nuovi teoremi di esistenza per equazioni non lineari di ordine n di tipo iperbolico*, Annali Scuola Normale Superiore di Pisa, (III) **5** (1951), pp. 329 - 353.

[14] *Sopra la teoria delle caratteristiche per i sistemi di equazioni non lineari alle derivate parziali del primo ordine*, Rend. Istituto Lombardo, **86** (1953), pp. 725 - 746.

[15] *Equazioni e sistemi di equazioni alle derivate parziali a caratteristiche reali*, Atti V Congresso U.M.I., Pavia-Torino, ottobre 1956, pp. 125 - 153.

[16] *Equazioni non lineari e teoria delle caratteristiche*, nel volume *Equazioni alle derivate parziali a caratteristiche reali*, C.I.M.E., Varenna (1956), pp. 1 - 187.

[17] *Problemi relativi alle caratteristiche per sistemi di equazioni semilineari a derivate parziali*, Annali di Matematica, (IV) **110** (1976), pp. 177 - 209.

[18] *Sopra alcune questioni relative a sistemi di equazioni quasi lineari a derivate parziali in due variabili indipendenti*, Annali di Matematica, (IV), **120** (1979), pp. 315 - 328.

DONATO A.

[1] *The propagation of weak discontinuities in quasi-linear hyperbolic systems when a characteristic shock occurs*, Proceedings Royal Soc. Edinburgh, 78 A (1978), pp. 285 - 290.

FUBINI G.

[1] *Di un metodo per l'integrazione e lo studio delle equazioni alle derivate parziali*, Rend. Circolo Matematico di Palermo, **17** (1903), pp. 222 - 235.

[2] *Su alcune nuove applicazioni dei metodi di Picard e di Riemann alla teoria delle equazioni alle derivate parziali*, Atti dell'Accademia Gioenia di Catania, (4) **18** (1904).

[3] *Nuove applicazioni dei metodi di Riemann e Picard alla teoria di alcune equazioni alle derivate parziali*, Rend. R. Accademia dei Lincei, (V) 14 (1905), pp. 438 - 443.

[4] *Alcuni nuovi problemi, che si presentano nella teoria delle equazioni alle derivate parziali*, Atti R. Accademia delle Scienze di Torino, **40** (1905), pp. 616 - 631.

GOURSAT E.

[1] *Leçons sur l'intégration des équations aux dérivées partielles du second ordre à deux variables indépendants*, Gauthier-Villars, Paris, Tome I (1896), Tome II (1898).

JEFFREY A.

[1] *The development of jump discontinuities in nonlinear hyperbolic systems of equations in two independent variables*, Archive for Rat. Mech. and Analysis, **14** (1963), pp. 27 - 37.

[2] *The evolution of discontinuities in solutions of homogeneous nonlinear hyperbolic equations having smooth initial data*, Journ. of Mathematics and Mechanics, **17** (1968), Parte I, pp. 331 - 352.

[3] *The propagation of weak discontinuities in quasi-linear hyperbolic systems with discontinuous coefficients*, Applicable Analysis, 3 (1973), I. *Fundamental theorie*, pp. 79 - 100. II. *Special cases and application*, pp. 359 - 375.

[4] *Quasilinear hyperbolic systems and waves*, Research Notes in Mathematics, 5, Pitman Publ., London 1976.

JEFFREY A., INAN E.

[1] *The propagation of second-order Lipschitz discontinuities in quasilinear hyperbolic systems with discontinuous coefficients*, Proc. Royal Soc. Edimburgh, Sect. A 74 (1974 - 75), pp. 205 - 224.

JEFFREY A., TANIUTI T.

[1] *Non-linear wave propagation*, Academic Press, New York, 1964.

LEVI E. E.

[1] *Sul problema di Cauchy per le equazioni lineari in due variabili a caratteristiche reali*, Rend. R. Istituto Lombardo, 41 (1908), Nota I, pp. 408 - 428; Nota II, pp. 691 - 712.

[2] *Sul problema di Cauchy per le equazioni a caratteristiche reali e distinte*, Rend. R. Accademia dei Lincei, (V) 17 (1908), pp. 331 - 339.

[3] *Sopra un teorema di esistenza per le equazioni alle derivate parziali del secondo ordine*, Annali di Matematica, (III) 18 (1911), pp. 287 - 333.

LEWY H.

[1] *Über das Anfangswertproblem einer hyperbolischen nichtlinearen partiellen Differentialgleichungen zweiter Ordnung mit zwei unabhängigen Veränderlichen*, Math. Ann., 98 (1928), pp. 179 - 191.

UBALDO RICHARD

TEOREMI DI CONFRONTO E DI OSCILLAZIONE PER EQUAZIONI DIFFERENZIALI LINEARI DEL SECONDO ORDINE

Summary. *Starting from an idea of Guido Fubini, a theory of comparison theorems for equations in non-self-adjoint form is sketched. As an application, a simple result of asymptotic type is obtained.*

1. Introduzione.

Ringrazio l'Accademia, nella persona del suo Presidente prof. Agostinelli, per avermi dato occasione di manifestare il profondo affetto che mi lega alla memoria di Guido Fubini, e di manifestarlo qui, tornando – come è detto nell'Odissea (X, 474) – «alla casa dall'alto tetto e alla tua terra dei padri»:

οἶκον ἐς ὑψόροφον καὶ σὴν ἐς πατρίδα γαῖαν.

1.1. E' noto il ruolo fondamentale del teorema di Sturm nel confronto tra le soluzioni di equazioni differenziali lineari del secondo ordine: risultati antichi e recenti sulla oscillazione o non oscillazione delle soluzioni, come pure sulla distribuzione degli zeri loro e delle loro derivate prime, sono legati a quel teorema ed alle sue successive generalizzazioni.

L'estesa letteratura sull'argomento si riferisce regolarmente alle equazioni sopra dette in forma autoaggiunta. Fa eccezione, a un primo esame, una breve nota di G. Fubini [1], nella quale il problema del confronto viene posto per l'equazione

(1) $$x'' + a(t)\, x' + b(t)\, x = 0.$$

Fubini osserva che l'espressione

(2) $$j(t) = 2a' + a^2 - 4b$$

è invariante rispetto alle trasformazioni

(3) $$x(t) = \lambda(t)\, z(t)$$

e ne deduce il seguente teorema di confronto:

Considerata una seconda equazione

(1′) $$y'' + a_1(t)\, y' + b_1(t)\, y = 0$$

con l'invariante

(2′) $$j_1(t) = 2a_1' + a_1^2 - 4b_1,$$

supposto che sia

(4) $$j_1(t) < j(t),$$

fra due zeri consecutivi di $x(t)$ esiste almeno uno zero di $y(t)$.

Ora, il teorema di Fubini poteva anche ottenersi scegliendo nella (3) rispettivamente

(5) $$x(t) = \lambda(t)\, z(t), \qquad \lambda(t) = \exp\left\{-\frac{1}{2}\int a(t)\, dt\right\},$$

(5′) $$y(t) = \lambda_1(t)\, z_1(t), \qquad \lambda_1(t) = \exp\left\{-\frac{1}{2}\int a_1(t)\, dt\right\},$$

ed applicando il teorema originale di Sturm alle equazioni trasformate

(6) $$z'' - \frac{1}{4}\, j(t)\, z = 0,$$

(6′) $$z_1'' - \frac{1}{4}\, j_1(t)\, z_1 = 0.$$

1.2. Non si può quindi affermare che l'obiettivo di svincolarsi dalla forma autoaggiunta sia stato dal Fubini realmente ottenuto (1). Ciò appare come un inconveniente qualora non si cerchino soltanto informazioni sull'esistenza di zeri delle soluzioni della (1) e delle loro derivate prime, ma si vogliano ottenere diseguaglianze concernenti $x(t)$, $y(t)$ come pure $x'(t)$, $y'(t)$, a partire da supposte diseguaglianze fra le coppie di coefficienti omologhi $a(t)$, $a_1(t)$, $b(t)$, $b_1(t)$ e da opportune condizioni iniziali.

Seguendo Tricomi (2), potremo chiamare queste diseguaglianze (ben note

(1) Al lavoro di Fubini si richiama la memoria [2] di G. Cimmino; in essa il ricorso alla forma autoaggiunta è esplicito.

(2) Si veda la monografia [7], al paragrafo 20.

quando $a(t)$, $a_1(t)$ siano identicamente nulle) col nome di *teoremi di confronto numerico*.

1.3. Ulteriori generalizzazioni dell'idea di Fubini sono state ottenute sfruttando la «trasformazione di Kummer»

$$(7) \qquad \begin{cases} x(t) = \lambda(t)\, z(t) \\ \tau = \varphi(t); \end{cases}$$

esse rientrano regolarmente nella teoria del confronto tra equazioni autoaggiunte (si veda D. Willett, [8], pp. 261 - 291 (3)).

Teoremi di confronto per equazioni in forma non autoaggiunta si trovano nei lavori di A. Ju. Levin (cfr. [4]) e nella monografia di K. Kreith [5]; i primi riguardano essenzialmente criteri di non oscillazione, i secondi l'estensione della identità di Picone e quindi i criteri di oscillazione (4). In ogni caso non si tratta di *teoremi di confronto numerico*.

Presento qui una proposta diversa. All'equazione (1) verranno contrapposte «equazioni di confronto» (5) non precisamente lineari, contenendo esse il valore assoluto delle derivate prime. Per mezzo di queste è possibile ottenere diseguaglianze e informazioni numeriche sugli zeri di $x(t)$, $x'(t)$ a partire da limitazioni verificate direttamente dai coefficienti $a(t)$, $b(t)$.

2. Primo teorema di confronto.

2.1. *Enunciato*: consideriamo le equazioni differenziali

$$(1) \qquad \mathscr{L}x = x'' + a(t)\, x' + b(t)\, x = 0,$$

---

(3) Il criterio V di pag. 272 è errato: si veda A. M. BRESQUAR, *Su alcuni criteri di oscillazione per le equazioni differenziali lineari del 2° ordine*. «Rend. Sem. Mat. Univ. di Padova, vol. 63, (1980), pp. 185 - 198».

(4) Errata è l'affermazione (Introduzione, pag. 1) che $-v'' + P(x)\, v = 0$ sia oscillante quando $P(x) < 0$ su una semiretta; basta il controesempio $P(x) = -1/4x^2$. Errato è pure l'enunciato del teorema 2.3 (pag. 14), secondo il quale l'equazione $(-p_1 u')' + q_0 u' + p_0 u = 0$ è oscillante quando

$$\int_\alpha^{+\infty} \frac{dx}{p_1(x)} = +\infty, \qquad \lim_{c \to +\infty} \left\{ \frac{q_0(c)}{2p_1(c)} + \int_\alpha^c \left[p_0(x) + \frac{q_0^2(x)}{4p_1(x)} \right] dx = +\infty, \right.$$

a titolo di contro esempio, basta supporre che p_0, q_0, p_1 siano costanti positive.

(5) La loro definizione differisce in parte da quella dei *comparison systems* usati da altri autori (cfr. J. Szarski, [6]).

(2) $$\mathscr{E}_1 y = y'' + a_1(t)\,|y'| + b_1(t)\,y = 0,$$

a coefficienti localmente sommabili in un intervallo $I \supset [\alpha, \alpha + \omega]$ (o nella semiretta $[\alpha, +\infty[$), e le rispettive soluzioni determinate dai dati iniziali

(3) $$\begin{cases} x(\alpha) = y(\alpha) = 0 \\ x'(\alpha) \geqslant y'(\alpha) > 0. \end{cases}$$

Posto che risulti

(3') $$\begin{cases} y(t) > 0 & \text{per } t \in]\alpha, \alpha + \omega[\\ y'(t) > 0 & \text{per } t \in]\alpha, \alpha + \eta[\end{cases}$$

(dove ovviamente $\alpha + \omega > \alpha + \eta$), sia ancora

(4) $$|a(t)| \leqslant a_1(t), \; b(t) \leqslant b_1(t) \qquad \text{per } t \in [\alpha, \alpha + \omega].$$

Allora si ha

(5) $$x(t) \geqslant y(t) \qquad \text{per } t \in [\alpha, \alpha + \omega],$$

(5') $$x'(t) \geqslant y'(t) \qquad \text{per } t \in [\alpha, \alpha + \eta].$$

2.2. *Corollario*: se $y(\alpha + \omega) = 0$, e se $x(t)$ si annulla in un punto β a destra di α, si ha

(6) $$\beta \geqslant \alpha + \omega;$$

se $y'(\alpha + \eta) = 0$ e se $x'(t)$ si annulla in un punto γ a destra di α, si ha

(6') $$\gamma \geqslant \alpha + \eta.$$

2.3. *Dimostrazione*: posto

(7) $$u = x'y - xy',$$

sussiste l'identità (quasi ovunque in $[\alpha, \alpha + \omega]$)

(8) $$u' + a(t)\,u = y \cdot \mathscr{L}x - x \cdot \mathscr{L}y;$$

d'altra parte, per le nostre soluzioni si ha (come sopra)

(9) $$\mathscr{L}x = 0, \qquad \mathscr{L}y \leqslant \mathscr{E}_1 y = 0,$$

quindi la funzione $u(t)$ verifica (come sopra) l'equazione

(10) $$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left\{\exp\left(\int_\alpha^t a(t)\,\mathrm{d}t\right) \cdot u(t)\right\} = f(t),$$

dove

$$f(t) = -x(t) \cdot \exp\left(\int_\alpha^t a(t)\,\mathrm{d}t\right) \cdot \mathscr{L}y(t). \tag{10'}$$

Sia ora

$$x(t) > 0 \qquad \text{per } t \in]\alpha, \beta[\tag{11}$$

e sia

$$\delta = \min(\omega, \beta - \alpha). \tag{12}$$

Poiché $f(t) \geqslant 0$ quasi ovunque in $[\alpha, \alpha + \delta]$, $u(\alpha) = 0$, segue dalla (10) che

$$u(t) \geqslant 0 \qquad \text{per } t \in [\alpha, \alpha + \delta],$$

quindi che il rapporto $x(t)/y(t)$ è ivi crescente. D'altra parte

$$\lim_{t \to \alpha +} \frac{x(t)}{y(t)} = \frac{x'(\alpha)}{y'(\alpha)} \geqslant 1,$$

e allora

$$x(t) \geqslant y(t) \qquad \text{per } t \in [\alpha, \alpha + \delta].$$

Si conclude che non può essere $x(\beta) = 0$ con $\beta < \alpha + \omega$; pertanto $\delta = \omega \leqslant \beta - \alpha$, e finalmente

$$x(t) \geqslant y(t) \qquad \text{per } t \in [\alpha, \alpha + \omega]. \tag{13}$$

Inoltre, dalla $u(t) \geqslant 0$ in $[\alpha, \alpha + \omega]$ e dalle (3') segue

$$\frac{x'(t)}{y'(t)} \geqslant \frac{x(t)}{y(t)} \geqslant 1 \qquad \text{per } t \in [\alpha, \alpha + \eta[$$

e ancora

$$x'(t) \geqslant y'(t) \qquad \text{per } t \in [\alpha, \alpha + \eta]. \tag{13'}$$

2.4. *Osservazione*: l'eguaglianza nella (13) si può avere soltanto se $x'(\alpha) = y'(\alpha)$, $u(t) = 0$ in $[\alpha, \alpha + \omega]$, ciò che comporta (quasi ovunque) $\mathscr{L}y = 0$ in $[\alpha, \alpha + \omega]$. Analoga osservazione vale per la (13').

3. Secondo teorema di confronto.

3.1. *Enunciato*: consideriamo le equazioni differenziali

$$\mathscr{L}x = x'' + a(t)\,x' + b(t)\,x = 0, \tag{1}$$

$$\mathscr{E}_2 z = z'' + a_2(t)\,|z'| + b_2(t)\,z = 0, \tag{2}$$

a coefficienti localmente sommabili in un intervallo $I \supset [\alpha, \alpha + \omega]$, e le rispettive soluzioni determinate dai dati iniziali

$$\begin{cases} z(\alpha) = x(\alpha) = 0 \\ z'(\alpha) \geqslant x'(\alpha) > 0. \end{cases} \tag{3}$$

Posto che risulti

$$\begin{cases} z(t) > 0 & \text{per } t \in]\alpha, \alpha + \omega[, & z(\alpha + \omega) = 0, \\ z'(t) > 0 & \text{per } t \in]\alpha, \alpha + \eta[, & z'(\alpha + \eta) = 0, \end{cases} \tag{3'}$$

(ovviamente $\alpha + \omega > \alpha + \eta$), sia ancora

$$|a(t)| \leqslant -a_2(t), \quad b(t) \geqslant b_2(t) \quad \text{per } t \in [\alpha, \alpha + \omega]. \tag{4}$$

Allora esistono due punti β, γ tali che

$$0 < x(t) \leqslant z(t) \qquad \text{per } t \in]\alpha, \beta[, \qquad x(\beta) = 0, \tag{5}$$

$$0 < x'(t) \leqslant z'(t) \qquad \text{per } t \in]\alpha, \gamma[, \qquad x'(\gamma) = 0, \tag{5'}$$

essendo

$$\alpha < \beta \leqslant \alpha + \omega \tag{6}$$

$$\alpha < \gamma \leqslant \alpha + \eta \tag{6'}$$

(e ovviamente $\gamma < \beta$).

3.2. *Dimostrazione*: Posto

$$u = x'z - xz', \tag{7}$$

sussiste l'identità (quasi ovunque in $[\alpha, \alpha + \omega]$)

$$u' + a(t)\,u = z \cdot \mathscr{L}x - x \cdot \mathscr{L}z. \tag{8}$$

D'altra parte, per le nostre soluzioni si ha (come sopra)

$$\mathscr{L}x = 0, \qquad \mathscr{L}z \geqslant \mathscr{E}_2 z = 0, \tag{9}$$

quindi la funzione $u(t)$ verifica (come sopra) l'equazione

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left\{\exp\left(\int_\alpha^t a(t)\,\mathrm{d}t\right) \cdot u(t)\right\} = f(t), \tag{10}$$

dove

$$(10') \qquad f(t) = -x(t) \cdot \exp\left(\int_{\alpha}^{t} a(t)\,\mathrm{d}t\right) \cdot \mathscr{L}z(t).$$

Sia ora

$$(11) \qquad x(t) > 0 \qquad \text{per } t \in \,]\alpha, \beta[$$

e sia

$$(12) \qquad \delta = \min\,(\omega, \beta - \alpha).$$

Poiché $f(t) \leqslant 0$ quasi ovunque in $[\alpha, \alpha + \delta]$, $u(\alpha) = 0$, segue dalla (10) che

$$u(t) \leqslant 0 \qquad \text{per } t \in [\alpha, \alpha + \delta],$$

sicché il rapporto $x(t)/z(t)$ è ivi decrescente. D'altra parte

$$\lim_{t \to \alpha+} \frac{x(t)}{z(t)} = \frac{x'(\alpha)}{z'(\alpha)} \leqslant 1,$$

e perciò

$$x(t) \leqslant z(t) \qquad \text{per } t \in [\alpha, \alpha + \delta].$$

Poiché $z(\alpha + \omega) = 0$ (ipotesi (3')), δ non può superare ω, e si ha $\beta = \alpha + \delta \leqslant \leqslant \alpha + \omega$; assunto per β il massimo valore compatibile con la (11), si ha $x(\beta) = 0$, e le (5) (6) sono verificate.

Successivamente, nel caso che sia $\beta > \alpha + \eta$, si ha che $u(t) \leqslant 0$, mentre $z(t)$, $z'(t)$ sono positive in $]\alpha, \alpha + \eta[$, e si ottiene

$$\frac{x'(t)}{z'(t)} \leqslant \frac{x(t)}{z(t)} \leqslant 1 \qquad \text{per } t \in \,]\alpha, \alpha + \eta[.$$

Ne segue che

$$x'(t) \leqslant z'(t) \qquad \text{per } t \in \,]\alpha, \alpha + \eta[,$$

e poiché $z'(\alpha + \eta) = 0$ (ipotesi (3')), esiste un punto γ per cui $z'(\gamma) = 0$, verificando le (5') (6'). E' poi evidente che, se $\beta \leqslant \alpha + \eta$, l'esistenza di γ e le (5') (6') restano vere.

3.3. *Osservazione*: per i casi di eguaglianza valgono le stesse conclusioni già viste per il primo teorema di confronto (2.4). In particolare, perché si abbia $x(t) = z(t)$ in $[\alpha, \alpha + \omega]$ dovrà essere $x'(\alpha) = z'(\alpha)$, $u(t) = 0$ in $[\alpha, \alpha + \omega]$, quindi (quasi ovunque) $\mathscr{L}z = 0$ in $[\alpha, \alpha + \omega]$.

4. Prima equazione di confronto a coefficienti costanti.

Si applica il primo teorema di confronto alle equazioni

$$\mathscr{L} x = x'' + a(t)\, x' + b(t)\, x = 0, \tag{1}$$

$$\mathscr{E}_1 y = y'' + L_1 |y'| + L_2 y = 0; \tag{2}$$

i dati iniziali sono

$$\begin{cases} x(\alpha) = y(\alpha) = 0 \\ x'(\alpha) = y'(\alpha) > 0, \end{cases} \tag{3}$$

e nell'intervallo, o semiretta, allo studio si ha

$$|a(t)| \leqslant L_1, \qquad b(t) \leqslant L_2. \tag{4}$$

Se esiste l'ascissa, prevista dal corollario 2.2, nella quale $y'(\alpha + \eta) = 0$, la $y(t)$ è simmetrica pari attorno a tale ascissa; si ha pertanto $\omega = 2\eta$, $y(\alpha + \omega) = 0$. In caso contrario si assumerà $\eta = \omega = +\infty$.

In ogni caso potremo limitare i calcoli all'intervallo $[\alpha, \alpha + \eta]$, eventualmente $[\alpha, +\infty[$, in cui la (2) è lineare a coefficienti costanti.

4.1. *Caso primo*: $L_1^2 - 4L_2 < 0$.
Dette $-\lambda \pm i\mu$ le radici dell'equazione caratteristica

$$k^2 + L_1 k + L_2 = 0, \qquad (\lambda > 0, \mu > 0),$$

si trova, per $t \in [\alpha, \alpha + \eta]$,

$$y(t) = y(\alpha + \eta)\, e^{-\lambda(t - \alpha - \eta)} \cdot \left\{ \cos [\mu(t - \alpha - \eta)] + \frac{\lambda}{\mu} \sin [\mu(t - \alpha - \eta)] \right\}, \tag{5}$$

dove $y(\alpha + \eta)$ è determinato dalla condizione $y'(\alpha) = x'(\alpha)$, da cui

$$y(\alpha + \eta) \cdot \frac{L_2}{\mu}\, e^{\lambda\eta} \sin (\mu\eta) = x'(\alpha), \tag{6}$$

e — a sua volta — η è determinato dalla condizione $y(\alpha) = 0$. Si trova

$$\operatorname{cotg} (\mu\eta) = \frac{\lambda}{\mu}, \qquad 0 < \mu\eta \leqslant \frac{\pi}{2}. \tag{7}$$

A questo risultato si può dare una forma più espressiva per mezzo del parametro θ definito dalla

(8) $$\cos\theta = \frac{L_1}{2\sqrt{L_2}}, \qquad 0 < \theta \leqslant \frac{\pi}{2}.$$

Ne risultano i valori

(9) $$\omega = 2\eta = \frac{1}{\sqrt{L_2}} \cdot \frac{2\theta}{\sin\theta}.$$

4.2. *Caso secondo*: $L_2 > 0, L_1^2 - 4L_2 \geqslant 0$.

Dette $-\rho_1, -\rho_2$ le radici dell'equazione caratteristica, per ora distinte,

$$k^2 + L_1 k + L_2 = 0, \qquad (\rho_2 > \rho_1 > 0),$$

si trova, per $t \in [\alpha, \alpha + \eta]$,

(5′) $$y(t) = \frac{y(\alpha+\eta)}{\rho_2 - \rho_1}\left\{\rho_2 e^{-\rho_1(t-\alpha-\eta)} - \rho_1 e^{-\rho_2(t-\alpha-\eta)}\right\},$$

e successivamente

(6′) $$y(\alpha+\eta) \cdot L_2 \frac{e^{\rho_2\eta} - e^{\rho_1\eta}}{\rho_2 - \rho_1} = x'(\alpha),$$

(7′) $$\eta = \frac{\log\rho_2 - \log\rho_1}{\rho_2 - \rho_1}.$$

Nel caso della radice doppia valgono i risultati prevedibili per continuità: si trova

($5_1'$) $$y(t) = x'(\alpha) \cdot (t-\alpha)\, e^{-\rho(t-\alpha)} \qquad \text{per } t \in [\alpha, \alpha+\eta],$$

($7_1'$) $$\eta = \frac{1}{\sqrt{L_2}}.$$

Per confronto col caso precedente, una forma più espressiva del risultato si può dare per mezzo del parametro θ definito dalla

(8′) $$\operatorname{ch}\theta = \frac{L_1}{2\sqrt{L_2}}, \qquad \theta \geqslant 0.$$

Si trova allora, con prolungamento continuo per $\theta = 0$,

(9′) $$\omega = 2\eta = \frac{1}{\sqrt{L_2}} \cdot \frac{2\theta}{\operatorname{sh}\theta}.$$

4.3. *Caso terzo*: $L_2 \leqslant 0$.

Semplici calcoli portano ad $\eta = \omega = +\infty$.

Del resto, per le soluzioni della $\mathscr{L}x = 0$, quando sia $b(t) \leqslant 0$, è ben noto che la funzione di Liapunov

$$\exp\left(\int_\alpha^t a(t)\,\mathrm{d}t\right) \cdot x(t)\,x'(t)$$

è crescente, sicché la condizione $x(\alpha) = 0$ vieta ogni altro zero di $x(t)$ e di $x'(t)$.

Se $L_2 < 0$, indicate con $\rho_2 > 0$, $-\rho_1 < 0$ le radici dell'equazione caratteristica, si trova

$$(5'') \qquad y(t) = x'(\alpha)\,\frac{e^{\rho_2(t-\alpha)} - e^{-\rho_1(t-\alpha)}}{\rho_2 + \rho_1},$$

se $L_2 = 0$, $L_1 \neq 0$,

$$(5''_i) \qquad y(t) = x'(\alpha)\,\frac{1 - e^{-L_1(t-\alpha)}}{L_1}$$

e se $L_2 = L_1 = 0$,

$$(5''_2) \qquad y(t) = x'(\alpha) \cdot (t - \alpha).$$

4.4. *Osservazione*: le limitazioni (9), (9') equivalgono sostanzialmente a quelle date dal De La Vallée Poussin nei paragrafi 14, 16 della celebre memoria [3].

5. Seconda equazione di confronto a coefficienti costanti.

Si applica il secondo teorema di confronto alle equazioni

$$(1) \qquad \mathscr{L}x = x'' + a(t)\,x' + b(t)\,x = 0,$$

$$(2) \qquad \mathscr{E}_2 z = z'' - L_1 |z'| + l_2 z = 0;$$

i dati iniziali sono

$$(3) \qquad \begin{cases} x(\alpha) = z(\alpha) = 0 \\ x'(\alpha) = z'(\alpha) > 0, \end{cases}$$

e nell'intervallo allo studio si ha

$$(4) \qquad |a(t)| \leqslant L_1, \qquad b(t) \geqslant l_2.$$

Se le radici dell'equazione caratteristica $k^2 - L_1 k + l_2 = 0$ sono reali, la $z(t)$

resta positiva con la sua derivata prima per $x > \alpha$; le condizioni (3′) del secondo teorema di confronto sono applicabili solo in parte (6), e non permettono di localizzare eventuali zeri di $x(t)$, $x'(t)$.

5.1. *Caso* $L_1^2 - 4l_2 < 0$.

In queste condizioni, come in 4.1, esiste l'ascissa $\alpha + \eta$ in cui $z'(t) = 0$, e la soluzione della (2) è simmetrica pari rispetto a tale ascissa; ne segue $z(\alpha + \omega) = 0$ con $\omega = 2\eta$.

Dette $\lambda \pm i\mu$ le radici dell'equazione caratteristica

$$k^2 - L_1 k + l_2 = 0, \qquad (\lambda > 0, \mu > 0),$$

si trova che nell'intervallo $[\alpha, \alpha + \eta]$ si ha

$$z(t) = z(\alpha + \eta) \cdot e^{\lambda(t-\alpha-\eta)} \cdot \left\{\cos\left[\mu(t-\alpha-\eta)\right] - \frac{\lambda}{\mu}\sin\left[\mu(t-\alpha-\eta)\right]\right\}, \tag{5}$$

dove le condizioni $z'(\alpha) = x'(\alpha)$, $z(\alpha) = 0$ forniscono successivamente

$$z(\alpha + \eta) \cdot \frac{l_2}{\mu} e^{-\lambda\eta} \sin(\mu\eta) = x'(\alpha), \tag{6}$$

$$\operatorname{cotg}(\mu\eta) = -\frac{\lambda}{\mu}, \qquad \frac{\pi}{2} \leqslant \mu\eta < \pi. \tag{7}$$

Introducendo il parametro φ definito dalla

$$\cos\varphi = -\frac{L_1}{2\sqrt{l_2}}, \qquad \frac{\pi}{2} \leqslant \varphi < \pi, \tag{8}$$

si può scrivere, analogamente a quanto si è fatto in 4.1,

$$\omega = 2\eta = \frac{1}{\sqrt{l_2}} \cdot \frac{2\varphi}{\sin\varphi}. \tag{9}$$

6. Caso della doppia limitazione.

6.1. *Teorema*: l'equazione

(6) Si può soltanto asserire che $x(t)$, $x'(t)$ non superano rispettivamente $z(t)$, $z'(t)$ a destra di α.

$$x'' + a(t)\,x' + b(t)\,x = 0 \tag{1}$$

verifichi le limitazioni

$$|a(t)| \leqslant L_1, \qquad l_2 \leqslant b(t) \leqslant L_2, \tag{2}$$

con

$$L_1^2 - 4l_2 < 0, \tag{2'}$$

in un intervallo $[\alpha, \alpha + \Delta]$.

Supporremo che Δ non sia troppo piccolo, e precisamente che sia (7)

$$\Delta \geqslant \frac{2 \arccos(-L_1/2\sqrt{l_2})}{\sqrt{l_2 - L_1^2/4}}. \tag{3}$$

Allora la soluzione $x(t)$ definita dalle condizioni iniziali

$$x(\alpha) = 0, \qquad x'(\alpha) > 0 \tag{4}$$

verifica le proprietà seguenti.

Esistono due punti β, γ tali che

$$x(t) > 0 \quad \text{in} \quad]\alpha, \beta[, \qquad x(\beta) = 0, \tag{5}$$

$$x'(t) > 0 \quad \text{in} \quad]\alpha, \gamma[, \qquad x'(\gamma) = 0. \tag{5'}$$

Posto

$$\cos\theta = \frac{L_1}{2\sqrt{L_2}}, \qquad 0 < \theta \leqslant \frac{\pi}{2}, \tag{6}$$

$$\cos\varphi = -\frac{L_1}{2\sqrt{l_2}}, \qquad \frac{\pi}{2} \leqslant \varphi < \pi, \tag{7}$$

valgono le doppie limitazioni

$$\frac{1}{\sqrt{L_2}} \cdot \frac{2\theta}{\sin\theta} \leqslant \beta - \alpha \leqslant \frac{1}{\sqrt{l_2}} \cdot \frac{2\varphi}{\sin\varphi}, \tag{8}$$

$$\frac{1}{\sqrt{L_2}} \cdot \frac{\theta}{\sin\theta} \leqslant \gamma - \alpha \leqslant \frac{1}{\sqrt{l_2}} \cdot \frac{\varphi}{\sin\varphi}. \tag{8'}$$

(7) La (3) assicura la deducibilità delle (8) (8′) entro l'intervallo $[\alpha, \alpha + \Delta]$.

6.2. *Dimostrazione*: si applicano i risultati ottenuti in 4.1, 5.1.

6.3. *Osservazione*: i casi di eguaglianza nelle (8) (8′) sono soltanto quelli previsti in 2.4, 3.3.

6.4. *Teorema di oscillazione*: se l'equazione (1) verifica le limitazioni (2) (2′) nella semiretta $[t_0, +\infty[$, essa è oscillante.

Dimostrazione: sia $x(t)$ la soluzione definita da $x(t_0) = 0$, $x'(t_0) > 0$. Dal teorema precedente segue l'esistenza di uno zero successivo t_1; avendosi $-x(t_1) = 0$, $-x'(t_1) > 0$, segue l'esistenza di un successivo zero t_2, etc.; gli zeri di $x(t)$ formano un insieme infinito e discreto. Tale proprietà si estende ad ogni altra soluzione per il classico teorema di Sturm.

7. Un teorema asintotico.

7.1. *Enunciato*: sia l'equazione

$$x'' + a(t)\,x' + b(t)\,x = 0 \tag{1}$$

a coefficienti localmente sommabili su una semiretta e sia

$$\lim_{t\to+\infty} a(t) = 0, \qquad \lim_{t\to+\infty} b(t) = 1. \tag{2}$$

Ogni soluzione è allora oscillante. Indicando con $\{t_n\}$ la successione degli zeri di $x(t)$, e con $\{\tau_n\}$ la successione degli zeri di $x'(t)$, posto

$$t_n < \tau_n < t_{n+1}, \tag{3}$$

si ha

$$\lim_{n\to+\infty} (t_{n+1} - t_n) = \pi, \tag{4}$$

$$\lim_{n\to+\infty} (\tau_n - t_n) = \frac{\pi}{2}. \tag{5}$$

7.2. *Dimostrazione*: scelto ϵ compreso fra 0 e 1, esiste una semiretta in cui valgono le diseguaglianze

$$|a(t)| < \epsilon, \qquad 1 - \epsilon < b(t) < 1 + \epsilon. \tag{6}$$

Ogni soluzione della (1) è allora oscillante, come si è osservato in 6.4.

Valgono le limitazioni (8) (8′) di 6.1; si ha quindi, per n abbastanza grande, [8]

$$\frac{1}{\sqrt{1+\epsilon}} \cdot \frac{2\theta}{\sin\theta} < t_{n+1} - t_n < \frac{1}{\sqrt{1-\epsilon}} \cdot \frac{2\varphi}{\sin\varphi}, \tag{7}$$

---

[8] Le (7) (7′) sono ora diseguaglianze strette, tali essendo le (6).

$$(7') \qquad \frac{1}{\sqrt{1+\epsilon}} \cdot \frac{\theta}{\sin\theta} < \tau_n - t_n < \frac{1}{\sqrt{1-\epsilon}} \cdot \frac{\varphi}{\sin\varphi},$$

essendo

$$(8) \qquad \cos\theta = \frac{\epsilon}{2\sqrt{1+\epsilon}}, \qquad 0 < \theta \leqslant \frac{\pi}{2},$$

$$(8') \qquad \cos\varphi = -\frac{\epsilon}{2\sqrt{1-\epsilon}}, \qquad \frac{\pi}{2} \leqslant \varphi < \pi.$$

Poiché

$$\lim_{\epsilon \to 0} \theta = \lim_{\epsilon \to 0} \varphi = \frac{\pi}{2},$$

ne segue la proposizione enunciata.

7.3. Nota aggiuntiva.

Usando equazioni di confronto lineari a coefficienti discontinui il teorema asintotico sopra enunciato è stato nel frattempo esteso (9) modificando le ipotesi (2) nelle

$$(2^*) \qquad \lim_{t \to +\infty} a(t) = h, \qquad \lim_{t \to +\infty} b(t) = k, \qquad h^2 - 4k < 0.$$

Le tesi (4) (5) diventano allora

$$(4^*) \qquad \lim_{n \to +\infty} (t_{n+1} - t_n) = \frac{2\pi}{\sqrt{4k - h^2}}$$

$$(5^*) \qquad \lim_{n \to +\infty} (\tau_n - t_n) = \frac{2}{\sqrt{4k - h^2}} \operatorname{arccotg} \frac{h}{\sqrt{4k - h^2}}.$$

(9) A. M. Bresquar, *Sugli zeri delle soluzioni di una classe di equazioni differenziali lineari del secondo ordine*, Rend. Sem. Mat. di Padova, vol. 64 (1981), pp. 247 - 270.

NOTA BIBLIOGRAFICA.

[1] FUBINI GUIDO, *Su un teorema di confronto per le equazioni del secondo ordine alle derivate ordinarie*, Ann. R. Sc. Norm. Sup. di Pisa serie II, vol. II, 1933, pp. 283 - 284. Riportato in:
G. FUBINI, *Opere scelte*, n. 157, Roma, Cremonese, vol. III, 1962, pp. 212 - 213.

[2] CIMMINO GIANFRANCO, *Teoremi di confronto fra equazioni o sistemi di equazioni differenziali lineari del second'ordine*, Rend. Sem. Mat. Univ. di Roma (IV) 1 (1936), pp. 31 - 52.

[3] DE LA VALLÉE POUSSIN C., *Sur l'équation différentielle linéaire du second ordre. Détermination d'une intégrale par deux valeurs assignées. Extension aux équations d'ordre n*, Journ. de Math. pure et appliquée (9) 8 (1929), pp. 125 - 144.

[4] LEVIN JU. A., *Behavior of the solutions of the equation* $x'' + p(t)x' + q(t)x = 0$ *in the non-oscillatory case*, Math. USSR Sbornik 4 (1968), pp. 33 - 55.

[5] KREITH KURT, *Oscillation theory*, Lecture Notes in Math., n. 324, Berlin, Springer, 1973.

[6] SZARSKI JACEK, *Differential inequalities*, Warszawa, Polish Scientific Publishers, 1967.

[7] TRICOMI FRANCESCO G., *Equazioni differenziali*, Torino, Einaudi, 2ª ed., 1953.

[8] WILLETT D., *Lectures on Ordinary Differential Equations*, ed. by R. McKelvey, New York, Academic Press, 1970.

PIETRO BUZANO

LE «LEZIONI DI ANALISI» DI GUIDO FUBINI

Beniamino Segre nella commemorazione di Guido Fubini tenuta all'Accademia dei Lincei il 13 novembre 1954 concludeva l'analisi dei lavori con queste parole: «non possiamo tacere delle Sue limpidissime «Lezioni di Analisi Matematica», opera giunta alla 5ª edizione, nella quale aveva profusi i tesori della Sua lunga e sagace esperienza didattica, dedicandovi costanti ed amorevoli cure. Una caratteristica di tale opera, imitata poi in vari Corsi consimili, è la riduzione al minimo della parte algebrica, per dare il massimo ai concetti propri al calcolo differenziale ed integrale, presentati nella forma più accessibile accompagnando la trattazione rigorosa con rappresentazioni intuitive e figurazioni immaginosamente suggestive».

Era giusto quindi che nella celebrazione del centenario della nascita promossa da questa nostra Accademia trovasse posto una relazione sulle «Lezioni di Analisi» di Guido Fubini e che fossi io ad assumermene il compito avendo ricoperto per oltre trent'anni quella stessa cattedra di Analisi Matematica.

Nel parlare delle suddette «Lezioni» mi riferisco alla ristampa della 5ª edizione uscita nel 1947 a cura dell'Editore Viglongo di Torino: le precedenti edizioni a cura della Società Tipografico Editrice Naz. (S.T.E.N.) portano le date del 1913, 1915, 1920, 1925.

Quale fosse il «progetto» di Fubini risulta chiaramente dalle parole con cui inizia la prefazione:

«Questo libro riassume le lezioni che svolgo al Politecnico di Torino. Nel redigerlo sono partito dalla convinzione che l'insegnamento teorico conserverà l'importanza che merita soltanto quando lo si sfrondi di tutto quanto è formale, oppure d'importanza soltanto teorica. La tecnica ha bisogno di concetti matematici, ma non ha per niente bisogno, per es., della concezione più generale degli enti che possiamo chiamare *punto* o *funzione*, o della teoria delle funzioni a derivata non integrabile.

Ridurre perciò le teorie esposte alla parte essenziale; scegliere le dimostrazioni più facili, anche se talvolta più lunghe, o valide con ipotesi più restrittive di quelle

strettamente necessarie; dimenticare, per quanto possibile, ogni considerazione di indole prevalentemente critica; dare il massimo sviluppo ai procedimenti induttivi, o di intuizione *a priori*; ricordare che il libro è destinato ai giovani, per cui la matematica è mezzo e non fine; illustrare pertanto le varie teorie con esempi suggeriti anche dalla fisica e dalla meccanica: ecco lo scopo prefissomi: il lettore dirà se io l'ho raggiunto.»

Non so se oggi Guido Fubini sarebbe ancora disposto a sottoscrivere integralmente questo programma: infatti successivi sviluppi della scienza e della tecnica sembrano piuttosto affermare l'utilità di un linguaggio matematico dotato di una certa generalità; per quel che riguarda poi i modi di ragionare e la scelta delle dimostrazioni molte cose sono cambiate e la ventata del Bourbakismo, pur coi suoi difetti, non è passata senza lasciar traccia.

Certo è però che l'esigenza della chiarezza e quella del collegamento alle applicazioni restano profondamente valide.

Dopo questa breve premessa dovrei passare ad un esame ravvicinato delle «Lezioni» di Guido Fubini, ma – dato il tempo a disposizione – anziché percorrere in sommaria rassegna tutti i ventun capitoli, mi è parso preferibile circoscrivere la mia analisi ad uno degli aspetti più originali di quest'opera – segnalato dallo stesso Fubini come una novità per un libro elementare – e cioè all'uso delle *funzioni additive d'insieme* per fondare la nozione d'integrale così come viene prospettata nei capitoli XV (Gli integrali definiti e le funzioni additive di intervallo) e XVI (Funzioni additive generali e integrali multipli).

Sull'opportunità di iniziare con il caso unidimensionale (funzioni additive di intervallo) sono alquanto perplesso perché in questo caso si verificano certi fatti che non hanno corrispettivo nel caso pluridimensionale. Comunque, volendo partire con Fubini dal caso unidimensionale, l'idea di funzione additiva si può far nascere considerando una sbarra materiale (non omogenea) rettilinea che occupi un intervallo $[a, b]$: la parte di essa corrispondente ad un intervallo parziale τ ha una massa $S(\tau)$ tale che, se si spezza τ in due intervalli τ_1 e τ_2, risulta:

$$S(\tau) = S(\tau_1) + S(\tau_2)$$

di qui l'additività.

Se indichiamo con $[c, d]$ l'intervallo possiamo sostituire il simbolo $S(\tau)$ con $S(c, d)$ ed estendere poi l'additività ad intervalli orientati assumendo che nel caso $c > d$ sia $S(c, d) = -S(d, c)$.

Indipendentemente dall'essere $S(\tau)$ additiva o meno se ne può definire la derivata che nell'esempio da cui siamo partiti coincide con l'ordinaria densità (lineare). A tale scopo basta fissare un punto x di $[a, b]$ e prendere in considerazione

intervalli τ contenenti x; allora se con $|\tau|$ indichiamo la misura (1) di τ, intenderemo per derivata di $S(\tau)$ nel punto x il limite:

$$\lim_{\tau \to x} \frac{S(\tau)}{|\tau|} = \left(\frac{dS}{d\tau}\right)_x$$

dove il passaggio al limite avviene col far restringere τ attorno al punto x. La derivata o *densità* viene così ad essere un'ordinaria funzione di punto $f(x)$.

Si pone allora il problema dell'esistenza e unicità della funzione additiva d'intervallo di data derivata, ossia il problema di determinare su $[a, b]$ una distribuzione di masse cui corrisponda un'assegnata densità $f(x)$ e che diremo *primitiva* di $f(x)$.

Nel caso unidimensionale a cui ci riferiamo interviene una circostanza che semplifica la risoluzione di questo problema. Si dà infatti la possibilità di associare ad una funzione additiva d'intervallo $S(\tau)$ una funzione ordinaria $F(x)$ così definita:

$$F(x) = S(c, x)$$

dove c è un punto prefissato di $[a, b]$ mentre x varia in detto intervallo. Risulta allora:

$$S(x_1, x_2) = S(x_1, c) + S(c, x_2) = F(x_2) - F(x_1) = [F(x)]_{x_1}^{x_2}$$

cioè *ogni funzione additiva d'intervallo* $S(x_1, x_2)$ *coincide con l'incremento di una funzione ordinaria e viceversa* ogni incremento di funzione ordinaria fra gli estremi di un intervallo è una funzione additiva di detto intervallo.

Potremo quindi parlare di una funzione ordinaria *associata* ad una funzione additiva d'intervallo: essa risulta determinata a meno di una costante (dipendente dalla scelta di c).

Ciò premesso, se τ è un intervallo di estremi x_1 e x_2, contenente x, si avrà:

$$\frac{S(\tau)}{|\tau|} = \frac{S(x_1, x_2)}{x_2 - x_1} = \frac{F(x_2) - F(x_1)}{x_2 - x_1} = F'(\xi)$$

dove nell'ultimo passaggio è stato applicato l'ordinario teorema della media e ξ è una quantità compresa fra x_1 e x_2. Passando al limite per $\tau \to x$ supposta la continuità di F' si ricava:

$$\left(\frac{dS}{d\tau}\right)_x = F'(x)$$

(1) Da prendersi con segno se τ è orientato.

cosicché la densità di $S(\tau)$ si identifica con la derivata della funzione di punto ad essa associata [2].

Ne consegue che la ricerca della funzione additiva primitiva di una data densità $f(x)$ si riconduce alla ricerca di una funzione di punto $F(x)$ tale che $F'(x) = f(x)$ ossia come si suol dire dell'integrale indefinito di $f(x)$. Per Fubini a questo punto il problema è risolto perché egli in precedenza (Cap. XII) ha già provato l'esistenza di $F(x)$ come area del rettangoloide di base $[c, x]$ sottostante al grafico di $f(x)$ supposta continua e positiva (essendo poi facile liberarsi dell'ipotesi della positività). Quanto alla nozione di area di un rettangoloide, essa rientra per Fubini in una premessa (Cap. I) sull'area di una figura piana A come elemento di separazione fra le aree dei poligoni contenuti in A e quelle dei poligoni contenenti A. Il teorema della media permette di stabilire che la data $f(x)$ determina $F(x)$ a meno di una costante e quindi determina pienamente $S(\tau)$.

A questo punto si può concludere che il caso unidimensionale – nella trattazione dianzi abbozzata – risulta facilitato dalle circostanze seguenti:

1) possibilità di associare ad ogni funzione additiva d'intervallo una funzione di punto e viceversa;

2) possibilità di far ricorso all'ordinario teorema della media;

3) esistenza, preventivamente acquisita, dell'integrale indefinito di una funzione continua.

Ebbene tutte e tre queste circostanze, che semplificano il caso unidimensionale, vengono a cadere quando si cerchi di estendere la trattazione al caso pluridimensionale, che è poi il più ricco di interesse anche con riguardo a quelle applicazioni fisiche che stanno tanto a cuore al Fubini. Ne derivano talune difficoltà sulle quali intendo brevemente trattenermi.

Anzitutto la famiglia degli intervalli contenuti in $[a, b]$ va sostituita con una famiglia $\{\tau\}$ di dominii limitati e misurabili [3], tutti contenuti in un dominio $\mathcal{T}$ (limitato e misurabile), tale inoltre che comunque si fissi un intorno I di un punto P di $\mathcal{T}$ esistono dominii della famiglia contenuti in I. La misurabilità dei dominii appare un elemento irrinunciabile della trattazione: circostanza tutt'altro che

---

(2) In effetti le due definizioni di derivata:

$$(1) \quad \lim_{h \to 0} \frac{F(x+h) - F(x)}{h} \qquad\qquad (2) \quad \lim_{\substack{x_1 \to x \\ x_2 \to x}} \frac{F(x_2) - F(x_1)}{x_2 - x_1}$$

non si equivalgono perché la derivabilità secondo (2) in tutto $[a, b]$ implica la continuità della derivata, mentre ciò non avviene secondo (1): cfr. G. Peano, *Sur la definition de la derivée*, Opere vol. I, pag. 210 (Cremonese, Roma, 1957).

(3) Di R^n: ma Fubini si riferisce solo ai casi $n = 2, 3$.

irrilevante perché essa obbliga Fubini a svolgere nel Cap. I tutta una premessa sulle aree piane e sui volumi basata su nozioni di geometria elementare. Il fatto che non sia possibile fondare la nozione di integrale sulle funzioni additive senza aver svolto preventivamente una teoria della misura diminuisce purtroppo l'interesse per tale impostazione: infatti quando si disponga già della teoria della misura la definizione ordinaria di integrale multiplo è a portata di mano cosicché può essere preferibile introdurre l'integrale come limite di somme e poi *reinterpretarlo* attraverso le funzioni additive: è questa infatti la via seguita da alcune trattazioni moderne (4).

Riprendendo il discorso secondo Fubini diremo che nella famiglia $\{\tau\}$ è definita una funzione additiva $S(\tau)$ se ad ogni τ corrisponde un determinato valore di S e se quando τ si spezza in τ_1 e τ_2 si ha:

$$S(\tau) = S(\tau_1) + S(\tau_2).$$

Sono esempi di funzioni additive il peso di un corpo materiale, la massa, il volume, la carica elettrica, i momenti statici ecc .

Indicando con $|\tau|$ la misura di τ, diremo derivata di $S(\tau)$ nel punto P il limite:

$$\lim_{\tau \to P} \frac{S(\tau)}{|\tau|} = \left(\frac{\mathrm{d}S}{\mathrm{d}\tau}\right)_P$$

calcolato col far restringere τ attorno a P.

Tale derivata è chiamata comunemente *densità* di $S(\tau)$ anche se a rigore questo termine si addice solo al caso in cui $S(\tau)$ è una massa: essa è una funzione di punto $f(P)$.

A questo punto per affrontare il discorso circa l'esistenza e l'unicità della funzione additiva d'insieme *primitiva* di una data $f(P)$ è necessario disporre di uno strumento equivalente all'ordinario *teorema della media.* Occorre quindi fabbricarselo ed a questo provvede Fubini dimostrando che: *se in ogni punto P di* $\mathfrak{T}$ *la funzione additiva* $S(\tau)$ *possiede densità* $f(P)$ *continua, allora*

$$l = \inf_{P \in \tau} f(P) \leqslant \frac{S(\tau)}{|\tau|} \leqslant \sup_{P \in \tau} f(P) = L$$

ossia la *densità media di* τ *è compresa fra il minimo e il massimo della densità in* τ.

La dimostrazione si svolge separatamente per i due estremi. Per l'estremo superiore L si tratta di provare che per qualsiasi $\epsilon > 0$ si ha:

---

(4) Cfr. ad es.: M. Picone, G. Fichera, *Trattato di analisi matematica*, Vol. I n. 87 (Tumminelli, Roma, 1954); G. Stampacchia, *Lezioni di analisi matematica*, Vol. II n. 77 (Liguori, Napoli, 1973).

$$\frac{S(\tau)}{|\tau|} < L + \epsilon$$

ossia che:

$$G(\tau) = S(\tau) - (L + \epsilon)|\tau| < 0.$$

Proviamo infatti a supporre che per un certo τ_1 sia $G(\tau_1) \geqslant 0$; decomponiamo τ_1 in parti di diametro $< 1/2$: in almeno una di esse τ_2 sarà $G(\tau_2) \geqslant 0$; decomponiamo τ_2 in parti di diametro $< 1/3$: in almeno una di esse τ_3 sarà $G(\tau_3) \geqslant 0$ e così di seguito. Si viene a costruire una successione $\tau_1, \tau_2, \ldots$ di dominii contenuti ciascuno nel precedente e diametro infinitesimo: in tali condizioni esiste un punto P_0 interno a tutti i dominii della successione e tale che:

$$\left(\frac{\mathrm{d}G}{\mathrm{d}\tau}\right)_{P_0} = \lim_{\tau_n \to P_0} \frac{G(\tau_n)}{|\tau_n|} \geqslant 0$$

il che è assurdo perché dalla definizione di $G(\tau)$ si ha

$$\frac{\mathrm{d}G}{\mathrm{d}\tau} = f(P) - (L + \epsilon) < 0.$$

La dimostrazione precedente nelle «Lezioni» di Fubini è solo abbozzata. Egli stesso però ne fece oggetto di una nota lincea (5), preceduta da un'altra a questa nostra Accademia (6), che però conteneva ipotesi più restrittive. La dimostrazione è pure riprodotta nella citata opera di Picone e Fichera come *teorema di Cauchy-Fubini*. Ritengo che l'abbinamento del nome di Cauchy a quello di Fubini sia dovuto al fatto che l'enunciato si trova già in Cauchy (7) ma con dimostrazione incompleta.

Solo per l'esattezza dei fatti (non credo infatti che alla Storia della Matematica giovi gran che la ricerca delle priorità) devo precisare che una dimostrazione completa del teorema della media si trova già a pag. 170 nelle *Applicazioni geometriche del calcolo infinitesimale* di Giuseppe Peano (F.lli Bocca – Torino – 1887) come lo stesso Peano sottolinea in una sua nota a questa nostra Accademia (8)

---

(5) G. Fubini, *Il teorema del valor medio*, Rendic. Lincei serie 5ª, vol. 24/1, (1915).

(6) G. Fubini, *Esiste un corpo a densità sempre nulla?*, Atti Acc. Sc. Torino, vol. 50, (1915).

(7) A. Cauchy, *Mémoire sur le rapport différentiel de deux grandeurs qui varient simultanément*, Exercices d'Analyse et de Physique Mathématique, Tome 2e, pag. 190, Paris (1841).

(8) G. Peano, *Le grandezze coesistenti di Cauchy*, Atti Acc. Sc. Torino, vol. 50, (1915).

contemporanea alle due di Fubini precedentemente citate. Anzi Peano stralcia la parte di dimostrazione concernente la costruzione di P_0 facendola rientrare in un enunciato più generale che egli attribuisce a Cantor (9). Per l'esattezza devo dire che Peano usa la terminologia di Cauchy, diversa da quella di Fubini in quanto non parla di *funzioni additive* bensì di *funzioni distributive*, chiamando poi *coesistenti* due di esse quando sono funzioni dei «pezzi» di uno stesso dominio, quali ad es. la massa e il volume. Tale circostanza potrebbe spiegare il fatto che Peano e Fubini sembrano ignorarsi vicendevolmente: fatto che personalmente considero come una delle tante manifestazioni della carenza di comunicazione che affligge il nostro mondo universitario. Acquisito il teorema della media, si può ben dire che tutto è risolto: da esso segue infatti l'unicità della primitiva in quanto una funzione additiva avente derivata nulla non può valere che zero; segue poi ancora l'esistenza perché se $S(\tau)$ è primitiva di $f(P)$ e se τ si spezza in parti le cui misure siano $\Delta\tau_1, \Delta\tau_2, \ldots, \Delta\tau_n$, dal teorema della media applicato alle singole parti segue

$$\sum l_k \cdot \Delta\tau_k \leqslant S(\tau) \leqslant \sum L_k \cdot \Delta\tau_k$$

dove l_k e L_k sono gli estremi di $f(P)$ nel pezzo di misura τ_k.

Di qui, se $f(P)$ è continua, $S(\tau)$ risulta costruita come elemento di separazione fra somme inferiori e somme superiori o anche come

$$\lim \sum f(P_k) \cdot \Delta\tau_k = \int_\tau f(P)\, d\tau$$

al tendere a zero del massimo diametro delle parti.

Fra i vantaggi che derivano da questa trattazione sono da segnalare i seguenti:

1) interpretazione del jacobiano di una trasformazione come *densità*. Se infatti si considera la trasformazione del piano (u, v) nel piano (x, y):

$$\begin{cases} x = x(u, v) \\ y = y(u, v) \end{cases}$$

e diciamo $S(\tau)$ l'area dell'immagine in (x, y) di un dominio τ di (u, v) si prova che:

$$\left|\frac{\partial(x, y)}{\partial(u, v)}\right| = \left|\frac{dS}{d\tau}\right|$$

2) possibilità di ricondurre il problema del cambiamento di variabili in un

(9) G. Cantor, Math. Annalen, tomo 23, pag. 454 (1884).

integrale multiplo a quello della derivazione di una funzione composta;

3) maggior facilità di definire l'area di una superficie curva, nonché l'integrale superficiale;

4) possibilità di risalire alla nozione di integrale di Stieltjes ove la misura di τ venga sostituita da una più generale funzione additiva $\mu(\tau)$.

Credo con ciò di aver illustrato uno degli aspetti più caratteristici delle «Lezioni» di Fubini ove si intrecciano le due esigenze da lui fortemente sentite di compiere il massimo sforzo per agevolare il compito del lettore e per far sì che l'analisi matematica si inserisca profondamente nel contesto degli altri insegnamenti. Infatti pochi matematici conobbero come lui le materie degli studi di ingegneria, stimolato anche dalla passione con cui seguiva gli studi dei due figli. La competenza da lui raggiunta in questo campo è pure attestata dall'opera enciclopedica in due volumi (il 2° dei quali uscito postumo) «La matematica dell'ingegnere e le sue applicazioni» scritta in collaborazione con Giuseppe Albenga e di cui non mi è purtroppo possibile parlare entro i limiti di questa breve relazione. Non posso però tacere di un'altra opera complemento indispensabile alle Sue «Lezioni»: si tratta degli «Esercizi di Analisi Matematica con speciale riguardo alle applicazioni» scritti in collaborazione con G. Vivanti. Non esito a dire che quest'opera in Italia non è stata ancora uguagliata per la ricchezza di esempi concernenti le applicazioni più disparate e per la messe di problemi pratici che fanno sentire al lettore come il calcolo sia in grado di risolvere questioni difficili non affrontabili per altra via.

Le peculiarità della didattica di Guido Fubini trovano riscontro in quel suo modo di far lezione caratterizzato dalla voce tonante e dal gesto espressivo che rendeva il suo insegnamento fortemente suggestivo e vivamente apprezzato dagli studenti. Con Francesco Severi, che insieme a lui commemoriamo, aveva in comune il brillante spirito intuitivo, l'infallibile visione di risultati futuri, il rifiuto dei particolari minuti e il gusto per le vedute originali e profonde.

Quanti di noi abbiamo avuto la fortuna di essere suoi allievi ne ricordiamo con ammirazione la grande presenza di spirito, la freschezza della mente, la facilità all'entusiasmo, l'amore per la libertà e possiamo ben immaginare che nessun maggior dolore poteva essergli recato che privarlo di quell'insegnamento che fu per lui fonte di massima soddisfazione, continua e appassionata ricerca di un'intima intesa con l'uditorio e sincera gioia di trasmettere il sapere.

ERMANNO MARCHIONNA

SUI CARATTERI DEI DIVISORI DI UNA VARIETA' ALGEBRICA

Summary. *Let V be a non-singular algebraic variety, of dimension $d \geqslant 2$, in a complex projective space S_r; let A be an arbitrary divisor on V; let $\mathcal{O}_V(A)$ be the invertible sheaf associated to A; let $H^s(V, \mathcal{O}_V(A))$ be the s-th cohomology group of V with coefficients in $\mathcal{O}_V(A)$ and put $h^s_V(A) = \dim H^s(V, \mathcal{O}_V(A))$.*

In this lecture one expresses $h^s_V(A)$ by means of numerical characters related to suitable differentials dependent on V and on A (Prop. XIV).

Let S be a non-singular prime divisor on V; denote by $g_i(V)$ and $l_i(S, V)$ the number of the i-uple differentials of the first kind on V (linearly independent) and the number of the previous i-uple differentials (linearly independent) which vanish on S. Let K be a canonical divisor on V.

Here it is proved that

$$H^i(V, \mathcal{O}_V(K+S)) = 0 \quad \textit{for every} \quad i = 1, 2, \ldots, d-1,$$

if and only if the following conditions hold:

$$l_i(S, V) = 0 \quad \textit{for} \quad i = 1, 2, \ldots, d-1, (d \geqslant 2),$$

$$g_i(V) = g_i(S) \quad \textit{for} \quad i = 1, 2, \ldots, d-2, (d \geqslant 3).$$

1. (Richiami). In uno spazio proiettivo complesso S_r - ad r dimensioni - consideriamo una varietà algebrica (irriducibile) *non singolare* d-dimensionale V_d, ($d \geqslant 2$), che nelle formule indicheremo più semplicemente con V.

Siano: D un divisore di V_d; $\mathcal{O}_V(D)$ il fascio invertibile associato al divisore D (1).

E' noto che lo n-esimo gruppo di coomologia $H^n(V, \mathcal{O}_V(D))$ della varietà V_d con coefficienti in $\mathcal{O}_V(D)$ è uno spazio vettoriale di dimensione finita sul corpo base ed è nullo per $n > d$. Porremo

$$(1_1) \qquad h^n_V(D) = \dim H^n(V, \mathcal{O}_V(D)).$$

---

(1) La nozione di fascio $\mathcal{O}_X(D)$ si può introdurre anche per divisori di Cartier appartenenti ad enti X più generali delle varietà da noi considerate (schemi, ecc.; cfr. ad es. Grothendieck - - Dieudonné [6], Chap. IV, 4$^{\text{me}}$ partie; Mumford [17]). Qui giova ricordare che sulla nostra V_d *non singolare* i divisori classici alla Severi-Weil si possono identificare con quelli di Cartier.

E' pure noto che, considerato il sistema lineare completo $|D|$ individuato da D su V_d, risulta

$$(2_1) \qquad h_V^0(D) = 1 + \dim |D|.$$

Inoltre, indicato con K un divisore canonico di V_d, si ha

$$(3_1) \qquad h_V^d(D) = h_V^0(K - D) = 1 + \dim |K - D|,$$

indice di specialità del divisore D (2).

Ciò posto, consideriamo su V_d un'ipersuperficie (irriducibile) *non singolare* S, e scegliamo nella classe di equivalenza lineare $\{D\}$ un divisore - che indichiamo ancora con D - tale che il divisore $D + S$ non contenga S fra le sue componenti ed intersechi S trasversalmente. Indichiamo con $(D + S) \cdot S$ il divisore della varietà S tagliato da $D + S$ (3), e con $\mathcal{O}_S((D + S) \cdot S)$ il fascio invertibile ad esso associato. Poniamo

$$(4_1) \qquad h_S^n((D + S) \cdot S) = \dim H^n(S, \mathcal{O}_S((D + S) \cdot S)).$$

Si ha la successione esatta di fasci

$$0 \to \mathcal{O}_V(D) \to \mathcal{O}_V(D + S) \to \mathcal{O}_S((D + S) \cdot S) \to 0 \quad (4)$$

Di qui si deduce la successione esatta di coomologia

$$(5_1) \qquad \begin{array}{l} 0 \to H^0(V, \mathcal{O}_V(D)) \ldots \to H^i(V, \mathcal{O}_V(D + S)) \to H^i(S, \mathcal{O}_S((D + S) \cdot S)) \\ \to H^{i+1}(V, \mathcal{O}_V(D)) \to H^{i+1}(V, \mathcal{O}_V(D + S)) \to \ldots \end{array}$$

Sia E la generica sezione iperpiana di V_d, e sia E_m la sezione di V_d con una generica forma d'ordine m; ($E_m \equiv mE$). Per m abbastanza alto, e per $n \geqslant 1$, risulta

$$(6_1) \qquad H^n(V, \mathcal{O}_V(D + mE)) = 0 \quad (5).$$

---

(2) Ciò può essere provato direttamente con la stessa tecnica usata da Zariski in [25], pp. 135 - 136; tuttavia la proprietà in questione è un caso particolare del teorema di dualità di Serre, cfr. [21].

(3) E' ben noto che la classe di equivalenza lineare individuata su S dal divisore $(D + S) \cdot S$ dipende soltanto (da S e) dalla classe di equivalenza lineare $\{D\}$ individuata su V_d dal divisore D; (si veda ad es. il successivo n. 8).

(4) Cfr. ad es. [2], ove la successione viene segnalata in un contesto più ampio.

(5) Infatti $\mathcal{O}_V(D + mE) \simeq \mathcal{O}_V(D) \otimes_{\mathcal{O}_V} \mathcal{O}_V(E_m) \simeq \mathcal{O}_V(D)(m)$, e per m alto, $n \geqslant 1$ risulta $H^n(V, \mathcal{O}_V(D)(m)) = 0$ in virtù di un classico risultato di Serre ([22], p. 259). Proprietà analoghe

Indichiamo con $\mu(V_d, D)$ il minimo intero strettamente positivo tale che per qualunque $m \geqslant \mu(V_d, D)$, $n \geqslant 1$ sia verificata la (6_1). *Per* $m \geqslant \mu(V_d, D)$, $i \geqslant 1$ *risulta notoriamente*

$$(7_1) \qquad H^{i+1}(V, \mathcal{O}_V(D)) \simeq H^i(E_m, \mathcal{O}_{E_m}((D+E_m)\cdot E_m)) \text{ (6)}$$

e di conseguenza

$$(8_1) \qquad h_V^{i+1}(D) = h_{E_m}^i((D+E_m)\cdot E_m).$$

Ciò posto, si considerino t ipersuperficie $E_{m_1}, \ldots, E_{m_t}$ segate su V_d da t *generiche* forme dello spazio ambiente S_r, $(1 \leqslant t \leqslant d-1)$, aventi ordini rispettivi $m_1, \ldots, m_t$. Si ponga

$$W_{d-t} = E_{m_1} \cap \ldots \cap E_{m_t} \qquad (W_{d-1} = E_{m_1}).$$

La sottovarietà W_{d-t} ha dimensione regolare $d-t$ ed è non singolare come V_d. Iterando il ragionamento con il quale si è pervenuti alla (8_1) si prova che, *se gli ordini* $m_1, \ldots, m_t$ *sono abbastanza elevati, per* $i \geqslant t$ *risulta*

$$(9_1) \qquad h_V^{i+1}(D) = h_{W_{d-t}}^{i+1-t}((D+E_{m_1}+\ldots+E_{m_t})\cdot W_{d-t}) \text{ (7)}$$

2. Sappiamo che per $D = K$, (divisore canonico di V_d), la classe di equivalenza lineare individuata su una ipersuperficie (irriducibile) non singolare S di V_d dal divisore $(D+S)\cdot S$ coincide con la classe di equivalenza lineare individuata su S da un divisore canonico K_S di S; (si tratta di una ben nota *proprietà dell'aggiunzione*; cfr. ad es. Kodaira [12], p. 108). Pertanto per $D = K$ la successione esatta

---

figurano in Zariski ([25], pp. 129 - 136), Chern ([1], p. 108), Hirzebruch ([8], p. 140 e seguenti, ove sono esposti significativi teoremi di «vanishing» dovuti a Kodaira); per le estensioni agli schemi cfr. ad es. Hartshorne [7], p. 229.

Ricordiamo inoltre che la V_d (complessa, proiettiva, non singolare) può essere pensata sia come varietà algebrica con la topologia di Zariski che come spazio analitico; e Serre ha mostrato che, su V_d, fasci algebrici coerenti e fasci analitici coerenti si corrispondono biunivocamente. La corrispondenza fra queste due categorie di fasci lascia invarianti i gruppi di coomologia. (Cfr. [23], p.p. 16 - 20; si veda pure [25], p. 134; [7], p.p. 438 - 441).

(6) Per giustificare la (7_1) basta porre $S = E_m$ nella successione esatta (5_1) ed osservare che per $m \geqslant \mu(V_d, D)$, $i \geqslant 1$ risulta

$$H^i(V, \mathcal{O}_V(D+E_m)) = H^{i+1}(V, \mathcal{O}_V(D+E_m)) = 0.$$

(7) Si potrebbe provare che la (9_1) è certamente valida quando tutti gli ordini $m_1, \ldots, m_t$ non sono inferiori all'intero $\mu(V_d, D)$ dianzi introdotto.

di coomologia (5_1) assume la forma

$$(1_2)\qquad \begin{aligned} &0 \to H^0(V, \mathcal{O}_V(K)) \to H^0(V, \mathcal{O}_V(K+S)) \to H^0(S, \mathcal{O}_S(K_s)) \\ &\overset{\alpha}{\to} H^1(V, \mathcal{O}_V(K)) \overset{\beta}{\to} H^1(V, \mathcal{O}_V(K+S)) \overset{\gamma}{\to} H^1(S, \mathcal{O}_S(K_S)) \\ &\overset{\delta}{\to} H^2(V, \mathcal{O}_V(K)) \to H^2(V, \mathcal{O}_V(K+S)) \to H^2(S, \mathcal{O}_S(K_S)) \\ &\to \dots \to H^d(V, \mathcal{O}_V(K+S)) \to H^d(S, \mathcal{O}_S(K_S)) = 0 \end{aligned}$$

Poiché S è un'ipersuperficie effettiva di V_d, *risulta notoriamente* $H^d(V, \mathcal{O}_V(K+S)) = 0$, in quanto la (3_1) porge $h^d_V(K+S) = 1 + \dim|-S| = 0$.

OSSERVAZIONE I. *Condizione necessaria affinché per ogni* $i = 1, 2, \dots, d-1$ *(con* $d \geqslant 3$*) si abbia*

$$(2_2)\qquad H^i(V, \mathcal{O}_V(K+S)) = 0$$

è che per ogni $i = 1, 2, \dots, d-2$ *risulti*

$$(3_2)\qquad h^i_S(K_S) = h^{i+1}_V(K).$$

Invero la successione esatta (1_2) mette in luce che le (2_2) implicano le relazioni

$$H^i(S, \mathcal{O}_S(K_S)) \simeq H^{i+1}(V, \mathcal{O}_V(K))$$

e di qui discendono le (3_2).

Ciò posto consideriamo i quattro omomorfismi consecutivi $\alpha, \beta, \gamma, \delta$ che figurano nella successione esatta (1_2)

$$\begin{aligned} &\alpha : H^0(S, \mathcal{O}_S(K_S)) \to H^1(V, \mathcal{O}_V(K)); \\ &\beta : H^1(V, \mathcal{O}_V(K)) \to H^1(V, \mathcal{O}_V(K+S)); \\ &\gamma : H^1(V, \mathcal{O}_V(K+S)) \to H^1(S, \mathcal{O}_S(K_S)); \\ &\delta : H^1(S, \mathcal{O}_S(K_S)) \to H^2(V, \mathcal{O}_V(K)). \end{aligned}$$

Indichiamo con $\operatorname{Im}\alpha, \dots, \operatorname{Im}\delta$ le immagini degli omomorfismi in questione.

OSSERVAZIONE II. *Le dimensioni delle immagini di* $\alpha, \beta, \gamma, \delta$ *sono legate dalle relazioni*

$$(4_2)\qquad \dim(\operatorname{Im}\alpha) + \dim(\operatorname{Im}\beta) = h^1_V(K);$$

$$(5_2)\qquad \dim(\operatorname{Im}\beta) + \dim(\operatorname{Im}\gamma) = h^1_V(K+S);$$

$$(6_2) \qquad \dim(\operatorname{Im}\gamma) + \dim(\operatorname{Im}\delta) = h^1_S(K_S) \text{ (8)}.$$

OSSERVAZIONE III. *Sussiste la relazione*

$$(7_2) \qquad \dim(\operatorname{Im}\alpha) = h^0_V(K) - h^0_V(K+S) + h^0_S(K_S).$$

La (7_2) è una conseguenza del fatto che dall'esattezza della successione (1_2) si può dedurre l'esattezza della successione

$$0 \to H^0(V, \mathcal{O}_V(K)) \to H^0(V, \mathcal{O}_V(K+S))$$
$$\to H^0(S, \mathcal{O}_S(K_S)) \xrightarrow{\alpha} \operatorname{Im}\alpha \to 0$$

Dalla esattezza della successione (1_2) discende immediatamente pure la relazione

$$(8_2) \qquad h^0_V(K) - h^0_V(K+S) + h^0_S(K_S) =$$
$$= \sum_{i=1}^{d} (-1)^{i+1}\{h^i_V(K) - h^i_V(K+S) + h^i_S(K_S)\}.$$

Ciò posto, consideriamo ancora su V_d un'ipersuperficie E_m segata da una generica forma d'ordine m dello spazio ambiente. La (8_1) del n. 1 mostra che per ogni $i \geqslant 1$ e per ogni $m \geqslant \mu(V_d, K)$ risulta

$$h^{i+1}_V(K) = h^i_{E_m}((K+E_m)\cdot E_m)$$

sicchè, considerato un divisore canonico K_{E_m} di E_m, e tenuta presente la proprietà dell'aggiunzione, possiamo scrivere

$$(9_2) \qquad h^{i+1}_V(K) = h^i_{E_m}(K_{E_m}), \qquad (i \geqslant 1).$$

Analogamente, supposto $d \geqslant 3$, posto $D = K+S$ nella (8_1), e considerata l'ipersuperficie segata da S su E_m - che indichiamo con l'unico simbolo $S \cdot E_m$ sia quando la pensiamo come divisore di E_m, sia quando la pensiamo come varietà di S_r - deduciamo che per $m \geqslant \mu(V_d, K+S)$ risulta

$$(10_2) \qquad h^{i+1}_V(K+S) = h^i_{E_m}(K_{E_m} + S\cdot E_m).$$

Consideriamo ora un divisore canonico $K_{S\cdot E_m}$ della varietà $(d-2)$-dimensio-

---

(8) Basta osservare che

$$\dim(\ker\beta) + \dim(\operatorname{Im}\beta) = \dim H^1(V, \mathcal{O}(K)).$$

Ma per l'esattezza della successione (1_2), risulta $\ker\beta = \operatorname{Im}\alpha$; di qui segue la (4_2); ecc..

nale $S \cdot E_m$. Applicando la (9_2) alla S invece che a V_d, possiamo affermare che *per m abbastanza alto* (cioè per m non inferiore ad un opportuno intero strettamente positivo $\mu(S, K_S)$) e per $i \geqslant 1$ risulta

$$(11_2) \qquad h_S^{i+1}(K_S) = h^i_{S \cdot E_m}(K_{S \cdot E_m}).$$

Indichiamo con L il massimo degli interi $\mu(V_d, K)$, $\mu(V_d, K+S)$, $\mu(S, K_S)$. Allora per $m \geqslant L$ sono valide simultaneamente le relazioni (9_2), (10_2) (11_2).

OSSERVAZIONE IV. *Per m abbastanza alto ($m \geqslant L$) è valida la relazione*

$$(12_2) \qquad \dim(\operatorname{Im}\delta) = h^0_{E_m}(K_{E_m}) - h^0_{E_m}(K_{E_m} + S \cdot E_m) + h^0_{S \cdot E_m}(K_{S \cdot E_m}).$$

Per la dimostrazione applichiamo dapprima la (8_2) sostituendo la varietà d-dimensionale V_d e la sua ipersuperficie S rispettivamente con la varietà $(d-1)$- dimensionale E_m e con l'ipersuperficie $S \cdot E_m$. Abbiamo

$$(13_2) \qquad h^0_{E_m}(K_{E_m}) - h^0_{E_m}(K_{E_m} + S \cdot E_m) + h^0_{S \cdot E_m}(K_{S \cdot E_m}) =$$

$$= \sum_{i=1}^{d-1} (-1)^{i+1} \{ h^i_{E_m}(K_{E_m}) - h^i_{E_m}(K_{E_m} + S \cdot E_m) + h^i_{S \cdot E_m}(K_{S \cdot E_m}) \} =$$

$$= \sum_{i=1}^{d-1} (-1)^{i+1} \{ h_V^{i+1}(K) - h_V^{i+1}(K+S) + h_S^{i+1}(K_S) \}.$$

Dalla successione esatta (1_2) possiamo d'altra parte dedurre la successione esatta

$$(14_2) \qquad 0 \to \operatorname{Im}\delta \hookrightarrow H^2(V, \mathcal{O}_V(K)) \to H^2(V, \mathcal{O}_V(K+S)) \to H^2(S, \mathcal{O}_S(K_S)) \to H^3(V, \mathcal{O}_V(K)) \to \ldots \to 0$$

da cui ricaviamo

$$(15_2) \qquad \dim(\operatorname{Im}\delta) = \sum_{i=2}^{d} (-1)^i \{ h^i_V(K) - h^i_V(K+S) + h^i_S(K_S) \}.$$

Dal confronto delle (15_2), (13_2) segue la (12_2).

3. (Ulteriori richiami). Consideriamo una varietà algebrica V^* ed una sua ipersuperficie S^*, entrambe non singolari, ed indichiamo con $g_h(V^*)$ ed $l_h(S^*, V^*)$ rispettivamente il numero dei *differenziali h-upli di prima specie* su V^* (linearmente indipendenti) ed il numero dei predetti *differenziali h-upli di prima specie*

(linearmente indipendenti) *che si annullano identicamente su* S^*.

Ritorniamo alla varietà V_d ed alla sua ipersuperficie non singolare S introdotte in precedenza, e consideriamo ancora le ipersuperficie E_m ed $S \cdot E_m$ segate rispettivamente su V_d e su S da una generica forma di ordine m dello spazio ambiente S_r.

Supponiamo $d \geqslant 3$. Poiché le ipersuperficie E_m ed $S \cdot E_m$ appartengono a sistemi lineari *ampî* nel senso di Kodaira, tracciati rispettivamente su V_d ed S, *per* $h \leqslant d - 2$ *risulta notoriamente*

$$(1_3) \qquad g_h(V_d) = g_h(E_m),$$

$$(2_3) \qquad l_h(S, V_d) = l_h(S \cdot E_m, E_m) \text{ (9)}.$$

Ciò posto, consideriamo (come nel n. 1) la sottovarietà W_{d-i} intersezione delle generiche ipersuperficie $E_{m_1}, E_{m_2}, \ldots, E_{m_i}$ della varietà V_d, e supponiamo $i \leqslant d - 2$, $d \geqslant 3$. Sia $S \cdot W_{d-i}$ la ipersuperficie segata da S su W_{d-i}.

Applicando iteratamente le (1_3), (2_3) *si verifica che per* $h \leqslant d - i - 1$ *risulta*

$$(3_3) \qquad g_h(V_d) = g_h(W_{d-i})$$

$$(4_3) \qquad l_h(S, V_d) = l_h(S \cdot W_{d-i}, W_{d-i}).$$

Per $d \geqslant 4$, $h \leqslant d - i - 2$, sostituendo V_d con la sua sottovarietà $(d-1)$-dimensionale S, si ottiene una relazione analoga alla (3_3):

$$(5_3) \qquad g_h(S) = g_h(S \cdot W_{d-i}).$$

4. Un fondamentale teorema di Kodaira (cfr. [12], p. 99) afferma che

$$(1_4) \qquad 1 + \dim |K + S| = $$
$$= g_d(V_d) - g_{d-1}(V_d) + g_{d-1}(S) + l_{d-1}(S, V_d).$$

(9) Sia E la *generica* ipersuperficie estratta da un sistema lineare ampio $|E|$ tracciato su V_d. (Previa un'opportuna trasformazione biregolare è lecito supporre che E sia la generica sezione iperpiana di V_d; Kodaira [12], p. 89). Sia B un differenziale h-uplo *di prima specie* su V_d; sia B_E il differenziale h-uplo *di prima specie* su E indotto da B. Per $h \leqslant d - 2$ l'applicazione $B \to B_E$ è una corrispondenza biunivoca fra gli spazi dei differenziali h-upli di prima specie di V_d ed E, laonde $g_h(V_d) = g_h(E)$; cfr. ad es. Kodaira [12], Teorema 2.4, p. 93.

Si consideri su S l'ipersuperficie non singolare $S \cdot E$ tagliata da E. Poiché il sistema lineare $|E|$ di V_d è supposto ampio, accade che pure il sistema lineare completo individuato su S dalla $S \cdot E$ è ampio. Sia B_S il differenziale h-uplo indotto da B sulla varietà S; sia $B_{S \cdot E}$ il differenziale h-uplo indotto da B_S sulla ipersuperficie $S \cdot E$ di S. E' noto che B_S *è identicamente nullo su* S *se, e solo se*, $B_{S \cdot E}$ *è identicamente nullo su* $S \cdot E$; cfr. ad es. Kodaira [12], Teorema 2.3, p. 93. D'altra parte $B_{S \cdot E}$ può considerarsi indotto su $S \cdot E$ anche da B_E; e poiché per $h \leqslant d - 2$ la corrispondenza $B \to B_E$ è biunivoca, segue che *il numero* $l_h(S, V_d)$ *dei differenziali h-upli B*

Poiché

$$h^0_V(K+S) = 1 + \dim|K+S|,$$

$$h^0_V(K) = 1 + \dim|K| = g_d(V_d),$$

$$h^0_S(K_S) = 1 + \dim|K_S| = g_{d-1}(S),$$

deduciamo dalla (1_4) la

OSSERVAZIONE V. *Per $d \geqslant 2$ risulta*

$$(2_4) \qquad h^0_V(K) - h^0_V(K+S) + h^0_S(K_S) = g_{d-1}(V_d) - l_{d-1}(S, V_d),$$

cioè

$$(3_4) \qquad \dim(\mathrm{Im}\,\alpha) = g_{d-1}(V_d) - l_{d-1}(S, V_d),$$

(si ricordi l'osservazione III del n. 2).

Al fine di provare la successiva relazione (5_4), consideriamo il caso in cui S coincida con una ipersuperficie E_m segata su V_d da una generica forma d'ordine m. Poiché E_m appartiene ad un sistema lineare ampio di V_d, risulta (cfr. Kodaira, [12], p. 102)

$$(4_4) \qquad l_{d-1}(S, V_d) = l_{d-1}(E_m, V_d) = 0,$$

sicché in tal caso abbiamo $\dim(\mathrm{Im}\,\alpha) = g_{d-1}(V_d)$.

D'altra parte possiamo scegliere m così elevato che risulti, (cfr. n. 1),

$$H^1(V, \mathcal{O}_V(K+S)) = H^1(V, \mathcal{O}_V(K+E_m)) = 0.$$

Allora la successione esatta (1_2) del n. 2 mostra che l'omomorfismo α è suriettivo, per cui $\dim(\mathrm{Im}\,\alpha) = h^1_V(K)$. Si deduce che *per $d \geqslant 2$ risulta*

$$(5_4) \qquad h^1_V(K) = g_{d-1}(V_d).$$

LEMMA VI. *Per $d \geqslant 2$, $0 \leqslant j \leqslant d-1$ sussiste la relazione*

$$(6_4) \qquad h^j_V(K) = g_{d-j}(V_d) \quad (10)$$

---

di V_d — di prima specie, linearmente indipendenti — *che si annullano identicamente su S eguaglia il numero $l_h(S \cdot E, E)$ dei differenziali h-upli B_E di E* — di prima specie, linearmente indipendenti — *che si annullano identicamente su $S \cdot E$.*

(10) La relazione (6_4) è nota, ma viene di solito ottenuta per altra via. Considerato lo zero Z dell'equivalenza lineare su V_d ed appoggiandosi ad un risultato di Dolbeault, si trova dapprima che $h^{d-j}_V(Z) = g_{d-j}(V_d)$. Dalla legge di dualità di Serre si deduce poi $h^{d-j}_V(Z) = h^j_V(K) = g_{d-j}(V_d)$. Cfr. ad es. Hodge [9], Zariski [25].

Sappiamo già che la (6_4) è vera per $j = 0,1$. Verifichiamola per $j > 1$, $(d \geqslant 3)$. In altri termini è sufficiente provare (per $i = 1, \ldots, d-2$) che

$$(7_4) \qquad h_V^{i+1}(K) = g_{d-i-1}(V_d).$$

Consideriamo come nel n. 1 la sottovarietà $W_{d-i} = E_{m_1} \cap \ldots \cap E_{m_i}$, e scegliamo gli ordini $m_1, m_2, \ldots, m_i$ così elevati che si abbia

$$h_V^{i+1}(K) = h^1_{W_{d-i}}((K + E_{m_1} + \ldots + E_{m_i}) \cdot W_{d-i})$$

(si applica la (9_1) per $D = K$, $t = i$). Considerato un divisore canonico $K_{W_{d-i}}$ di W_{d-i}, tenuta presente la proprietà dell'aggiunzione, ed applicando la (5_4) alla varietà $(d-i)$-dimensionale W_{d-i}, si deduce

$$h^1_{W_{d-i}}((K + E_{m_1} + \ldots + E_{m_i}) \cdot W_{d-i}) =$$
$$= h^1_{W_{d-i}}(K_{W_{d-i}}) = g_{d-i-1}(W_{d-i}).$$

Ma abbiamo visto nel n. 3 che $g_{d-i-1}(W_{d-i}) = g_{d-i-1}(V_d)$. Resta così provata la (7_4).

OSSERVAZIONE VII. *Per* $d \geqslant 2$ *risulta*

$$(8_4) \qquad \dim(\operatorname{Im} \beta) = l_{d-1}(S, V_d).$$

Ciò segue immediatamente dalle relazioni (4_2), (3_4), (5_4).

5. Proviamo ora il

LEMMA VIII. *Per* $d \geqslant 2$ *risulta*

$$(1_5) \qquad h_V^{d-1}(K + S) = l_1(S, V_d).$$

Studiamo prima il caso $d = 2$ (la $V_d = V$ è ora una *superficie*); proviamo che

$$(2_5) \qquad h^1_V(K + S) = l_1(S, V).$$

La (8_2) si riduce allora alla relazione

$$h^0_V(K) - h^0_V(K + S) + h^0_S(K_S) =$$
$$= \{h^1_V(K) - h^1_V(K + S) + h^1_S(K_S)\} -$$
$$- \{h^2_V(K) - h^2_V(K + S) + h^2_S(K_S)\}.$$

Dall'ipotesi $d = 2$ deduciamo che: $h^2_S(K_S) = 0$ perché S nel caso attuale ha dimensione 1; $h^2_V(K)$ ed $h^1_S(K_S)$ sono gli indici di specialità dei sistemi canonici di V ed S (cfr. n. 1), e perciò sono entrambi uguali ad 1; $h^2_V(K + S)$ è nullo (cfr. n. 2); infine la (5_4) porge $h^1_V(K) = g_1(V)$. Tenuta presente la relazione (2_4) si

deduce la (2_5).

Proviamo ora la (1_5) per $d > 2$. Seguendo il procedimento indicato al termine del n. 1 si considerino su V_d $d-2$ ipersuperficie generiche $E_{m_1}, \ldots, E_{m_{d-2}}$, la superficie $W_2 = E_{m_1} \cap \ldots \cap E_{m_{d-2}}$ e la curva (non singolare) $S \cdot W_2$ segata da S sopra W_2.

Scegliendo abbastanza alti gli ordini $m_1, m_2, \ldots, m_{d-2}$, ed applicando la (9_1) per $i = d-2$, $t = d-2$, $D = K + S$, otteniamo

$$h_V^{d-1}(K+S) = h_{W_2}^1((K + E_{m_1} + \ldots + E_{m_{d-2}} + S) \cdot W_2) =$$
$$= h_{W_2}^1(K_{W_2} + S \cdot W_2) = l_1(S \cdot W_2, W_2).$$

Ma sappiamo (cfr. n. 3) che $l_1(S \cdot W_2, W_2) = l_1(S, V_d)$; di qui l'asserto.

6. Proviamo la

OSSERVAZIONE IX. *Per $d \geqslant 3$ risulta*

$$(1_6) \qquad \dim(\operatorname{Im}\delta) = g_{d-2}(V_d) - l_{d-2}(S, V_d).$$

Abbiamo visto nel n. 2 (osservazione IV) che per m abbastanza alto risulta

$$(2_6) \qquad \dim(\operatorname{Im}\delta) =$$
$$= h_{E_m}^0(K_{E_m}) - h_{E_m}^0(K_{E_m} + S \cdot E_m) + h_{S \cdot E_m}^0(K_{S \cdot E_m}).$$

Applicando la (2_4) alla varietà $d-1$ dimensionale E_m (invece che a V_d) possiamo scrivere

$$h_{E_m}^0(K_{E_m}) - h_{E_m}^0(K_{E_m} + S \cdot E_m) + h_{S \cdot E_m}^0(K_{S \cdot E_m}) =$$
$$= g_{d-2}(E_m) - l_{d-2}(S \cdot E_m, E_m).$$

Tenuto presente (cfr. n. 3) che $g_{d-2}(E_m) = g_{d-2}(V_d)$, $l_{d-2}(S \cdot E_m, E_m) = l_{d-2}(S, V_d)$, si giunge alla (1_6).

OSSERVAZIONE X. *Per $d \geqslant 3$ risulta*

$$(3_6) \qquad \dim(\operatorname{Im}\gamma) = g_{d-2}(S) - g_{d-2}(V_d) + l_{d-2}(S, V_d).$$

Dimostrazione. Ricordiamo che la (6_2) del n. 2 porge

$$(4_6) \qquad \dim(\operatorname{Im}\gamma) + \dim(\operatorname{Im}\delta) = h_S^1(K_S).$$

Tenuto presente che K_S è un divisore canonico della varietà $(d-1)$-dimensionale S, si ottiene (cfr. n. 4)

$$h_S^1(K_S) = g_{d-2}(S);$$

di qui, dalla (1_6) e dalla (4_6) si perviene alla (3_6).

A questo punto si può osservare che dalle (5_2), (8_4), (3_6) discende immediatamente la relazione:

$$(5_6) \qquad h^1_V(K+S) = g_{d-2}(S) - g_{d-2}(V_d) + l_{d-2}(S, V_d) + l_{d-1}(S, V_d).$$

Ciò posto dimostriamo il

LEMMA XI. *Per* $1 \leqslant j < d-1, d \geqslant 3$ *risulta*

$$(6_6) \qquad h^j_V(K+S) = g_{d-j-1}(S) - g_{d-j-1}(V_d) + \\ + l_{d-j-1}(S, V_d) + l_{d-j}(S, V_d).$$ (11)

Abbiamo visto che la (6_6) è vera per $j = 1$; proviamola per $j > 1$. Sia $K_{W_{d-t}}$ un divisore canonico della sottovarietà W_{d-t} considerata al termine del n. 1. Ponendo $i + 1 = j$, $t = j - 1$, $D = K + S$, e scegliendo gli ordini $m_1, m_2, \ldots, m_{j-1}$ abbastanza alti, otteniamo dalla (9_1) del n. 1:

$$(7_6) \qquad h^j_V(K+S) = h^1_{W_{d-j+1}}((K+E_{m_1}+\ldots+E_{m_{j-1}}+S)\cdot W_{d-j+1}) = \\ = h^1_{W_{d-j+1}}(K_{W_{d-j+1}} + S\cdot W_{d-j+1}).$$

Applichiamo la (5_6) alla varietà non singolare W_{d-j+1} (che ha dimensione $d' = d-j+1 \geqslant 3$) ed alla sua ipersuperficie non singolare $S \cdot W_{d-j+1}$. Otteniamo

$$(8_6) \qquad h^1_{W_{d-j+1}}(K_{W_{d-j+1}} + S\cdot W_{d-j+1}) = \\ = g_{d-j-1}(S\cdot W_{d-j+1}) - g_{d-j-1}(W_{d-j+1}) + \\ + l_{d-j-1}(S\cdot W_{d-j+1}, W_{d-j+1}) + l_{d-j}(S\cdot W_{d-j+1}, W_{d-j+1}).$$

Tenute presenti le relazioni (3_3), (4_3), (5_3) del n. 3, e le relazioni (8_6), (7_6) si si giunge immediatamente alla (6_6).

7. Abbiamo ricordato nel n. 2 che $H^d(V, \mathcal{O}_V(K+S)) = 0$. Determiniamo ora le condizioni affinché si abbia

$$H^1(V, \mathcal{O}_V(K+S)) = H^2(V, \mathcal{O}_V(K+S)) = \\ = \ldots = H^{d-1}(V, \mathcal{O}_V(K+S)) = 0.$$

(11) Una proprietà equivalente a quella espressa dal Lemma è stata enunciata in termini geometrici nel lavoro [3] di Demaria; lo stesso Demaria in un lavoro anteriore l'aveva ottenuta riunendo alcune relazioni che avevamo segnalato in [14].

Ovviamente si tratta di trovare le condizioni affinché risulti

$$(1_7) \qquad h^1_V(K+S) = h^2_V(K+S) = \ldots = h^{d-1}_V(K+S) = 0.$$

Il Lemma VIII mostra che, *nel caso in cui V_d sia una superficie* ($d = 2$), *si ha* $h^1_V(K+S) = 0$ *se e solo se* $l_1(S, V_2) = 0$ (12).

Esaminiamo il caso $d \geqslant 3$.

TEOREMA XII. *Condizione necessaria e sufficiente affinché* - in relazione ad una V_d non singolare ($d \geqslant 3$) e ad una sua ipersuperficie S non singolare - *risulti per ogni* $i = 1, 2, \ldots, d-1$

$$(2_7) \qquad H^i(V, \mathcal{O}_V(K+S)) = 0$$

è che si abbia simultaneamente:

$$(3_7) \qquad l_i(S, V_d) = 0 \qquad \text{per ogni } i = 1, 2, \ldots, d-1;$$

$$(4_7) \qquad g_i(V_d) = g_i(S) \qquad \text{per ogni } i = 1, 2, \ldots, d-2.$$

I lemmi VIII, XI mostrano che se le condizioni $(3_7), (4_7)$ sono soddisfatte, allora sono valide le (1_7), sicché la condizione espressa dal teorema è sufficiente. Mostriamo che la stessa condizione è pure necessaria. Invero la validità delle (2_7) implica (in virtù dell'osservazione I del n. 2) che sia $h^i_S(K_S) = h^{i+1}_V(K)$ per $i = 1, 2, \ldots, d-2$; la qual cosa – tenuto presente il Lemma VI – equivale ad affermare che

$$g_{d-i-1}(S) = g_{d-i-1}(V_d),$$

laonde sono valide le (4_7).

D'altra parte la validità delle (2_7) equivale a quella delle (1_7). Tenute presenti le relazioni $(1_5), (6_6), (4_7)$ si ricavano le (3_7).

OSSERVAZIONE XIII. *Quando S appartiene ad un sistema lineare ampio* (nel senso di Kodaira), le (3_7), (4_7) sono certamente soddisfatte ([12] p.p. 93, 102); di conseguenza *risulta* $H^i(V, \mathcal{O}_V(K+S)) = 0$ *per* $i = 1, 2, \ldots, d-1$.

Si riottiene così un teorema di Kodaira-Spencer ([13], p. 874) (13).

---

(12) Quando S è una sezione iperpiana della superficie V, la relazione $h^1_V(K+S) = 0$ è certamente valida, perchè risulta $l_1(S, V) = 0$; si riottiene così in forma coomologica un noto teorema di Picard sulla regolarità dell'aggiunto $|K+S|$.

Il risultato di Picard è stato esteso da Severi con la seguente proposizione: Se una curva irriducibile S della superficie fa parte di un sistema (algebrico) continuo che non sia un fascio irrazionale, allora il sistema aggiunto $|K+S|$ è regolare; (cfr. ad es. [24], p. 74, si veda pure [10], p. 867).

(13) Ricordiamo che Kodaira in [11] ha stabilito un altro importante criterio per la regola-

8. Sia A un divisore arbitrario della varietà $V_d (d \geqslant 2)$. Vogliamo esprimere i caratteri coomologici di A,

$$h_V^n(A) = \dim H^n(V, \mathcal{O}_V(A)), \qquad n = 1, 2, \ldots, d,$$

in funzione di caratteri relativi a differenziali dipendenti da V_d e da A.

E' noto che si possono trovare su V_d due ipersuperficie distinte X e Y (irriducibili) *non singolari*, estratte da due sistemi lineari completi $|X|$ ed $|Y|$, *ampî* nel senso di Kodaira, tali che A risulti linearmente equivalente al divisore $X - Y$:

$$A \equiv X - Y \quad (14)$$

Indichiamo: con X^i la sottovarietà non singolare $(d-i)$-dimensionale $(i \leqslant d-1)$ ottenuta intersecando i ipersuperficie *generiche* X estratte dal sistema $|X|$; con $K(X^i)$ un divisore canonico di X^i; con $D \cdot X^i$ il divisore segato su X^i da un divisore D di V_d (è lecito supporre che le componenti di D non contengano X^i). Poniamo per completezza:

$$X^0 = V_d, \quad X^1 = X, \quad K(X^0) = K, \quad D \cdot X^0 = D, \quad Y \cap X^0 = Y.$$

Per la genericità delle varie ipersuperficie X estratte da $|X|$ possiamo supporre $X^i = X^{i-1} \cap X$; inoltre l'ipersuperficie Y estratta dal sistema ampio $|Y|$ può essere

---

rità dei sistemi aggiunti sopra una varietà complessa. Tale criterio non può essere esteso incondizionatamente a varietà – singolari o no – definite sopra un corpo di caratteristica $p > 0$; ciò è stato provato da Mumford [18] e Raynaud [20]. Per ulteriori generalizzazioni del criterio di Kodaira cfr. Mumford [18], Grauert-Riemenschneider [5], Ramanujam [19].

Aggiungiamo quanto segue. *Supponiamo che* – sulla nostra varietà algebrica complessa V_d – *l'ipersuperficie non singolare S sia un divisore ampio nel senso di Grothendieck*. Allora dal menzionato criterio di Kodaira si deduce $H^i(V, \mathcal{O}_V(-S)) = 0$ per $i = 0, 1, \ldots, d-1$ (cfr. ad es. Mumford [18] p. 94, Hartshorne [7] p. 248); e dal teorema di dualità di Serre si ottiene $H^i(V, \mathcal{O}_V(K+S)) = 0$ per $i = 1, \ldots, d$. Pertanto il teorema XII mostra che

$$l_i(S, V_d) = 0 \qquad \text{per } i = 1, 2, \ldots, d-1, \quad (d \geqslant 2);$$

$$g_i(V_d) = g_i(S) \qquad \text{per } i = 1, 2, \ldots, d-2, \quad (d \geqslant 3).$$

(14) Si considerino su V_d un arbitrario divisore D_0, un divisore effettivo F ed una generica sezione iperpiana E. Esiste un intero ν (dipendente da D_0 e da F) tale che per $h > \nu$ il sistema lineare completo $|hE + D_0 - F|$ è ampio (Kodaira [12], p. 90). Poniamo $D_0 = -A$, $F = E$, $m = h - 1$, e scegliamo $m > 0$. Allora per m abbastanza alto il sistema lineare completo $|Y| = |mE - A|$ è ampio, sicchè la generica ipersuperficie Y estratta da $|Y|$ è non singolare. Anche la generica ipersuperficie X estratta dal sistema lineare ampio $|X| = |mE|$ è non singolare. Poiché $|Y| = |X - A|$, risulta $A \equiv X - Y$; c.v.d.

Conviene pure ricordare che, considerata su V_d una sottovarietà non singolare W di dimensione $s \geqslant 1$, si possono scegliere le suindicate ipersuperficie X ed Y in modo che esse non contengano W e taglino su W due ipersuperficie $X \cdot W$ ed $Y \cdot W$ prive di punti singolari. Si dice allora che il divisore $X - Y$, (appartenente alla classe di equivalenza lineare $\{A\}$ di V_d) taglia

scelta in modo che l'ipersuperficie $X^{i-1} \cap Y$ di X^{i-1} sia non singolare.

Indichiamo con $\Gamma(D, V_d)$ lo spazio lineare costituito da tutti i differenziali meromorfi d-upli W (sulla varietà d-dimensionale V_d) che sono multipli di $-D$, nel senso che $(W) + D \geqslant 0$; (Kodaira [12], p. 96). Risulta:

$$\dim \Gamma(D, V_d) = 1 + \dim |K + D| = h^0_V(K + D).$$

In particolare, per $D = -A$ abbiamo

$$(1_8) \qquad \dim \Gamma(-A, V_d) = h^0_V(K - A).$$

Analogamente, ragionando sulla varietà $(d-i)$-dimensionale X^i e considerando i suoi divisori $A \cdot X^i$ e $K(X^i) - A \cdot X^i$, possiamo scrivere

$$(2_8) \qquad \dim \Gamma(-A \cdot X^i, X^i) = h^0_{X^i}(K(X^i) - A \cdot X^i).$$

Il problema che abbiamo posto all'inizio del paragrafo ammette una soluzione banale per $n = 0$, $n = d$, in quanto

$$h^0_V(A) = \dim \Gamma(A - K, V_d),$$

$$h^d_V(A) = h^0_V(K - A) = \dim \Gamma(-A, V_d).$$

(Si ricordi che in virtù del Teorema di dualità di Serre risulta

$$h^{d-i}_V(A) = h^i_V(K - A), \qquad i = 0, 1, \ldots, d).$$

Una soluzione relativa ai valori intermedi di n è espressa dalla

PROPOSIZIONE XIV. *Per* $i = 1, 2, \ldots, d-1$ *risulta*

$$(3_8) \qquad h^{d-i}_V(A) = \dim \Gamma(-A \cdot X^{i-1}, X^{i-1}) + \dim \Gamma(-A \cdot X^i, X^i) + \\ + g_{d-i}(V_d) - g_{d-i+1}(X^{i-1}) - g_{d-i}(Y \cap X^{i-1}).$$

Per la dimostrazione conviene scrivere la (3_8) nella forma

$$(4_8) \qquad h^i_V(K - A) = h^0_{X^{i-1}}(K(X^{i-1}) - A \cdot X^{i-1}) + h^0_{X^i}(K(X^i) - A \cdot X^i) + \\ + g_{d-i}(V_d) - g_{d-i+1}(X^{i-1}) - g_{d-i}(Y \cap X^{i-1}) \ (^{15}).$$

W trasversalmente. La classe di equivalenza lineare individuata su W dal divisore $X \cdot W - Y \cdot W$ dipende soltanto da A e da W, e viene indicata col simbolo $\{A \cdot W\}$.

(15) Una relazione analoga alla (4_8) è stata da noi segnalata in termini geometrici - senza dimostrazione - nella conferenza [15] tenuta a Namur nel 1965. Una dimostrazione della stessa relazione - ancora in linguaggio geometrico - è stata poi esposta da U. Gasapina in [4].

Nel caso $i = 1$ la (4_8) si riduce alla relazione

$$(5_8) \qquad h^1_V(K-A) = h^0_V(K-A) + h^0_X(K(X) - A \cdot X) + $$
$$+ g_{d-1}(V_d) - g_d(V_d) - g_{d-1}(Y).$$

Ricordiamo che, in virtù di una proprietà dell'aggiunzione, abbiamo

$$h^0_X(K(X) - A \cdot X) = h^0_X((K-A+X) \cdot X).$$

Poiché Y è un'ipersuperficie estratta da un sistema lineare ampio di V_d, risulta $l_{d-1}(Y, V_d) = 0$. Tenuto presente il teorema di Kodaira richiamato all'inizio del n. 4, si ha

$$1 + \dim |K+Y| = g_d(V_d) - g_{d-1}(V_d) + g_{d-1}(Y).$$

D'altra parte $h^0_V(K-A+X) = 1 + \dim |K+Y|$; pertanto dalle ultime relazioni scritte deduciamo che la (5_8) può essere espressa nella forma

$$(6_8) \qquad h^1_V(K-A) = h^0_V(K-A) + h^0_X((K-A+X) \cdot X) - h^0_V(K-A+X).$$

Verifichiamo la (6_8). Poniamo $D = K-A$, $S = X$ nella successione di coomologia (5_1) del n. 1. Otteniamo la successione esatta

$$(7_8) \qquad 0 \to H^0(V, \mathcal{O}_V(K-A)) \to H^0(V, \mathcal{O}_V(K-A+X))$$
$$\to H^0(X, \mathcal{O}_X((K-A+X) \cdot X)) \to H^1(V, \mathcal{O}_V(K-A)) \to H^1(V, \mathcal{O}_V(K-A+X))$$
$$\to \ldots \to H^{i-1}(V, \mathcal{O}_V(K-A+X)) \to H^{i-1}(X, \mathcal{O}_X((K-A+X) \cdot X))$$
$$\to H^i(V, \mathcal{O}_V(K-A)) \to H^i(V, \mathcal{O}_V(K-A+X)) \to \ldots \to 0.$$

Poiché il sistema lineare $|Y| = |X-A|$ è ampio, il teorema ricordato nella osservazione XIII assicura che per $j = 1, 2, \ldots, d-1$ risulta

$$(8_8) \qquad H^j(V, \mathcal{O}_V(K-A+X)) = 0.$$

In particolare è nullo il gruppo $H^1(V, \mathcal{O}_V(K-A+X))$. Ne consegue che - considerando quest'ultimo gruppo accanto a quelli che lo precedono nella successione (7_8) - si può affermare che la relazione (6_8) è valida, e quindi è valida anche la (5_8).

Dimostriamo ora la (4_8) per $i > 1$, $(d \geqslant 3)$. Essendo

$$H^{i-1}(V, \mathcal{O}_V(K-A+X)) = H^i(V, \mathcal{O}_V(K-A+X)) = 0,$$

la successione esatta (7_8) mette in luce che

$$(9_8) \qquad H^i(V, \mathcal{O}_V(K-A)) \simeq H^{i-1}(X, \mathcal{O}_X((K-A+X) \cdot X)).$$

Poiché su X abbiamo $(K-A+X) \cdot X \equiv K(X) - A \cdot X$, la (9_8) acquista la forma

$$H^i(V, \mathcal{O}_V(K-A)) \simeq H^{i-1}(X, \mathcal{O}_X(K(X)-A \cdot X)),$$

per cui risulta

$$h^i_V(K-A) = h^{i-1}_X(K(X)-A \cdot X).$$

Sostituendo nel ragionamento qui esposto le varietà V_d ed X rispettivamente con le varietà X ed X^2 e supponendo $i-1>1$, ricaviamo

$$h^{i-1}_X(K(X)-A \cdot X) = h^{i-2}_{X^2}(K(X^2)-A \cdot X^2).$$

Così proseguendo (se necessario) si verifica che

$$(10_8) \qquad h^i_V(K-A) = h^1_{X^{i-1}}(K(X^{i-1})-A \cdot X^{i-1}), \qquad (1<i \leqslant d-1).$$

Ciò posto, riprendiamo in esame la (5_8), e sostituiamo la varietà V_d, le ipersuperficie X, Y ed il divisore A di V_d, rispettivamente con la varietà X^{i-1}, le ipersuperficie $X \cap X^{i-1}$, $Y \cap X^{i-1}$ ed il divisore $A \cdot X^{i-1}$ di X^{i-1} (si ricordi che $X^i = X \cap X^{i-1}$). Tenuto presente che sulla varietà $(d-i+1)$-dimensionale X^{i-1} risulta $A \cdot X^{i-1} \equiv X \cdot X^{i-1} - Y \cdot X^{i-1}$ otteniamo

$$\begin{aligned}(11_8) \qquad & h^1_{X^{i-1}}(K(X^{i-1})-A \cdot X^{i-1}) = \\ & = h^0_{X^{i-1}}(K(X^{i-1})-A \cdot X^{i-1}) + \\ & + h^0_{X^i}(K(X^i)-A \cdot X^i) + g_{d-i}(X^{i-1}) - \\ & - g_{d-i+1}(X^{i-1}) - g_{d-i}(Y \cap X^{i-1}).\end{aligned}$$

Avendo supposto $i>1$, ed avendo estratto da un sistema ampio $|X|$ le ipersuperficie di V_d con le quali sono state costruite le sottovarietà non singolari $X^1, X^2, \ldots, X^{i-1}$, risulta (cfr. n. 3):

$$g_{d-i}(V_d) = g_{d-i}(X) = g_{d-i}(X^2) = \ldots = g_{d-i}(X^{i-1}).$$

Tenuto conto di ciò, le relazioni (10_8), (11_8) conducono alla (4_8).

9. Richiamiamo infine alcune considerazioni sulle irregolarità, aggiungendo qualche cenno sulle possibili estensioni.

Indichiamo con $P_g(V_d)$ e con $P_a(V_d)$ il genere geometrico e il genere aritmetico della nostra varietà non singolare V_d, $(d \geqslant 1)$. Per definizione si ha

$$P_g(V_d) = \dim |K| + 1 = g_d(V_d),$$
$$P_a(V_d) = \delta(K) + 1 + (-1)^{d+1};$$

ove $\delta(K)$ è la dimensione virtuale del sistema canonico $|K|$.

Nel 1909 Severi emise la congettura che fosse

$$(1_9) \qquad P_a(V_d) = g_d(V_d) - g_{d-1}(V_d) + \\ + g_{d-2}(V_d) - \ldots + (-1)^{d-1} g_1(V_d).$$

Questa relazione, già nota per $d \leqslant 2$, è stata dimostrata completamente da Kodaira nel 1954; (cfr. [12], p. 108).

Severi ha definito *ultima irregolarità* di V_d (o *irregolarità d-dimensionale* di V_d) l'intero relativo

$$(2_9) \qquad q_d(V_d) = P_g(V_d) - P_a(V_d).$$

Per $d = 1$ (caso delle curve non singolari) risulta $P_g(V_1) = P_a(V_1) = g_1(V_1)$, sicché l'irregolarità $q_1(V_1)$ è nulla. Per $d = 2$ l'intero $q_2(V_2)$ è la ben nota irregolarità della *superficie* V_2, e risulta

$$q_2(V_2) = g_1(V_2) \geqslant 0,$$

(relazione di Castelnuovo - Severi; 1905).

Dalle (1_9), (2_9) si deduce per $d \geqslant 2$

$$(3_9) \qquad q_d(V_d) = g_{d-1}(V_d) - g_{d-2}(V_d) + \ldots + (-1)^{d-2} g_1(V_d).$$

Ciò posto consideriamo (su V_d) s *sistemi lineari* $|X_1|, |X_2|, \ldots, |X_s|$ (distinti o no, con $s < d-1, d \geqslant 3$), i quali siano *ampî* nel senso di Kodaira. Siano $X_1, X_2, \ldots, X_s$ *s generiche ipersuperficie* (non singolari) *estratte dai sistemi considerati*, tali che la sottovarietà

$$V_{d-s} = X_1 \cap X_2 \cap \ldots \cap X_s, \qquad (V_{d-1} = X_1),$$

sia anch'essa non singolare ed abbia dimensione regolare $d - s$.

L'ultima irregolarità $P_g(V_{d-s}) - P_a(V_{d-s})$ della varietà V_{d-s} è espressa dalla relazione

$$(4_9) \qquad q_{d-s}(V_{d-s}) = g_{d-s-1}(V_{d-s}) - \\ - g_{d-s-2}(V_{d-s}) + \ldots + (-1)^{d-s-2} g_1(V_{d-s}).$$

In virtù delle proprietà dei differenziali di prima specie ricordate nel n. 3, tenuto presente che $X_1, \ldots, X_s$ appartengono a sistemi lineari ampî di V_d, si può affermare che *per ogni* $i < d - s$ *risulta*

$$g_i(V_d) = g_i(X_1) = g_i(X_1 \cap X_2) = \\ = \ldots = g_i(X_1 \cap X_2 \cap \ldots \cap X_s).$$

In particolare, per ogni $i < d - s$ abbiamo $g_i(V_d) = g_i(V_{d-s})$, sicché la (4_9) assume la forma

$$(5_9) \qquad q_{d-s}(V_{d-s}) = g_{d-s-1}(V_d) - \\ - g_{d-s-2}(V_d) + \ldots + (-1)^{d-s-2} g_1(V_d).$$

Pertanto, per $d \geqslant 3, s < d - 1$, *l'ultima irregolarità della sottovarietà*

$$V_{d-s} = X_1 \cap \ldots \cap X_s$$

dipende soltanto dalla varietà V_d, e non dai sistemi ampî $|X_1|, \ldots, |X_s|$ adoperati per definirla.

Si dice che $q_{d-s}(V_{d-s})$ *è l'irregolarità* $(d-s)$*-dimensionale di* V_d, *e la si indica con il simbolo più appropriato* $q_{d-s}(V_d)$.

La proprietà dianzi osservata è vera anche per $d \geqslant 2, s = d - 1$, poiché in tal caso la sottovarietà V_{d-s} è una curva non singolare V_1 e l'irregolarità $q_1(V_1)$ è nulla. *Si pone perciò* $q_1(V_d) = 0$.

L'irregolarità $q_2(V_d)$ non è mai negativa (perché uguale alla irregolarità di una superficie V_2). Si dice che $q_2(V_d)$ è l'*irregolarità superficiale* di V_d; (essa è stata considerata per la prima volta nel 1906 in un lavoro di Castelnuovo ed Enriques). Per $h > 2$ l'irregolarità $q_h(V_d)$ può essere negativa.

Dalle (3_9), (5_9) si deduce che per $s = 0, 1, \ldots, d-2$ risulta

$$(6_9) \qquad q_{d-s}(V_d) = g_{d-s-1}(V_d) - \\ - g_{d-s-2}(V_d) + \ldots + (-1)^{d-s-2} g_1(V_d).$$

Di qui segue subito che per ogni $i = 1, 2, \ldots, d-1$ si ha

$$(7_9) \qquad q_i(V_d) + q_{i+1}(V_d) = g_i(V_d).$$ [16]

Tenuto presente il lemma VI, possiamo tradurre le (6_9), (7_9) in termini coomologici:

$$q_{d-s}(V_d) = h_V^{s+1}(K) - h_V^{s+2}(K) + \ldots + (-1)^{d-s-2} h_V^{d-1}(K),$$

$$q_i(V_d) + q_{i+1}(V_d) = h_V^{d-i}(K).$$

In particolare, per l'irregolarità superficiale di V_d si ha

$$q_2(V_d) = h_V^{d-1}(K).$$

---

[16] Le relazioni (6_9), (7_9) sono state formulate da Severi; cfr. ad es. [24], p. 278. Avvertiamo che Severi *definisce* dapprima l'irregolarità $q_{d-s}(V_d)$ mediante la (6_9) ed osserva successivamente che $q_{d-s}(V_d)$ è l'ultima irregolarità della sezione di V_d con un generico sottospazio $(r-s)$-dimensionale dello spazio ambiente S_r; (quest'ultima proprietà è un caso particolare di quella dianzi presentata nel testo).

NOTA. In [16] abbiamo esteso ad una varietà *normale* V_d di uno spazio proiettivo complesso S_r la nozione d'irregolarità s-dimensionale, $(s = 1, 2, \ldots, d)$. Abbiamo verificato fra l'altro che, se si considera la sottovarietà V_{d-s} ottenuta intersecando V_d con s forme generiche degli ordini $m_1, m_2, \ldots, m_s$ $(s < d)$, accade che - scegliendo gli ordini $m_1, m_2, \ldots, m_s$ abbastanza alti - *l'ultima irregolarità* $q_{d-s} = P_g(V_{d-s}) - P_a(V_{d-s})$ *di* V_{d-s} *dipende soltanto da* V_d e non dalle forme adoperate per definirla. (Quando V_d è non singolare, la predetta irregolarità q_{d-s} è proprio l'irregolarità $(d - s)$-dimensionale di V_d espressa dalla (6_9); allora gli ordini $m_1, m_2, \ldots, m_s$ possono essere scelti a piacere).

I metodi adoperati nel lavoro [16] sono prettamente geometrici. Riteniamo che alcuni risultati sulle irregolarità che abbiamo qui riferito possano essere estesi (anche con l'uso della teoria dei fasci) a varietà algebriche di uno spazio proiettivo $S_r(k)$ definite sopra un arbitrario campo k algebricamente chiuso.

Ci proponiamo di sviluppare questi argomenti in un successivo lavoro.

BIBLIOGRAFIA

[1] CHERN S.S., *Complex manifolds*, Scientific Report on the Second Summer Institute, Bulletin of American Mathematical Society, *62*, (1956).

[2] CONTE A., *Sulla dimensione virtuale di un divisore di Cartier appartenente ad uno schema proiettivo*, Rend. Ist. Lombardo, *106*, (1972).

[3] DEMARIA D. C., *Sugli indici d'irregolarità di un sistema lineare di ipersuperficie appartenenti ad una varietà algebrica*, Rend. Sem. Matem. Università e Politecnico Torino, *23*, (1963 - 64).

[4] GASAPINA U., *Sugli indici d'irregolarità di un sistema lineare tracciato sopra una varietà algebrica non singolare*, Rend. Sem. Matem. Università e Politecnico Torino, *25*, (1965 - 66)

[5] GRAUERT H., RIEMENSCHNEIDER O., *Verschiwindungssätze für analytische Koomologiegruppen auf Komplexen Raümen*, Several complex variables I, Maryland, Springer, *155*, (1970).

[6] GROTHENDIECK A., DIEUDONNÉ J., *Eléments de Géométrie Algébrique*, Publications Scientifiques de l'I.H.E.S., Bur - sur - Yvette, (1960 - 67).

[7] HARTSHORNE R., *Algebraic Geometry*, Springer - Verlag, New York - Heidelberg - Berlin, (1977).

[8] HIRZEBRUCH F., *Topological Methods in Algebraic Geometry*, Third enlarged edition, Springer - Verlag, Berlin - Heidelberg - New York, (1966).

[9] HODGE W. V. D., *A note on the Riemann-Roch theorem*, Journal London Mathem. Soc., *30*, (1954).

[10] KODAIRA K., *The theorem of Riemann-Roch on compact analytic surfaces*, American Journal of Mathem., *59*, (1952).

[11] KODAIRA K., *On a differential-geometric method in the theory of analytic stacks*, Proc. Nat. Acad. of Science U.S.A., *39*, (1953).

[12] KODAIRA K., *Some results in the transcendental theory of algebraic varieties*, Annals of Mathem., *59*, (1954).

[13] KODAIRA K., SPENCER D. C., *Divisor class groups on algebraic varieties*, Proc. Nat. Acad.

of Science, U.S.A., *39*, (1953).

[14] MARCHIONNA E., *Il teorema di Riemann-Roch sulle varietà algebriche e questioni collegate con la teoria delle irregolarità*, Appendice VI al trattato di F. Severi citato in [24].

[15] MARCHIONNA E., *Quelques propriétés des systèmes linéaires d'hypersurfaces tracées sur une variété algébrique*, Comptes Rendus de la III^e Réunion des Mathématiciens d'expression latine, Namur 1965; Centre Belge de Recherches Mathématiques, (1966).

[16] MARCHIONNA E., *Sulla dimensione virtuale ed effettiva di un sistema lineare d'ipersuperficie appartenenti ad una varietà algebrica singolare*, Rendiconti di Matematica , *25*, (1966).

[17] MUMFORD D., *Lectures on curves on an algebraic surface*, Princeton, (1966).

[18] MUMFORD D., *Pathologies III*, American Journal of Mathem. *89*, (1967).

[19] RAMANUJAM C. P., *Remarks on the Kodaira vanishing theorem*, Journal of Indian Math. Soc., *36*, (1972).

[20] RAYNAUD M., *Contre exemple au «vanishing theorem» en caracteristique $p > 0$*, nel volume «C. P. Ramanujam - A tribute», Tata Institute, Springer Verlag, (1978).

[21] SERRE J. P., *Un théorème de dualité*, Comm. Math. Helvetici, *29*, (1955).

[22] SERRE J. P., *Faisceaux algébriques cohérents*, Annals of Mathem. *61*, (1955).

[23] SERRE J. P., *Géométrie algébrique et Géométrie analityque*, Ann. Inst. Fourier, *6*, (1956).

[24] SEVERI F., *Geometria dei sistemi algebrici sopra una superficie e sopra una varietà algebrica*, vol. III, Edizioni Cremonese, Roma, (1959).

[25] ZARISKI O., *Algebraic Sheaf Theory*, Scientific Report on the Second Summer Institute, Bulletin of American Mathematical Society, *62*, (1956).

DAVIDE CARLO DEMARIA

IL CONTRIBUTO DI FRANCESCO SEVERI ALLA TOPOLOGIA

Secondo il titolo, in questa conferenza devo illustrare il contributo di Francesco SEVERI alla topologia. Ora è ben noto che quasi tutta la Sua opera, e non soltanto i Suoi scritti a carattere strettamente topologico, possono considerarsi attinenti a questa disciplina. Infatti la maggior parte dei risultati di geometria algebrica può assumere veste e contenuto topologico, come hanno dimostrato lo stesso SEVERI e molti altri matematici, tra cui RIEMANN, PICARD, POINCARÈ, LEFSCHETZ, ecc. Mi limiterò a ricordare un solo esempio: la teoria della base per la totalità delle curve algebriche di una superficie algebrica. Questa teoria fu dapprima costruita dal Nostro negli anni 1905 - 1910 con metodi algebrico-trascendenti e venne poi riottenuta dal POINCARÈ nel 1910 con mezzi trascendenti. Essa fu infine interpretata topologicamente nel 1924 dal LEFSCHETZ, il quale, considerando le curve algebriche della superficie come cicli algebrici della sua riemanniana, mostrò che sostanzialmente erano equivalenti i due concetti di equivalenza algebrica e di equivalenza topologica.

Naturalmente non mi è possibile in così poco tempo di occuparmi di tutti i contributi del SEVERI alla topologia. Di conseguenza, e pure in considerazione del fatto che alcuni autorevoli colleghi illustrano la Sua opera sotto gli aspetti geometrici ed algebrici, intendo circoscrivere il mio discorso ad alcuni Suoi risultati che pure se un po' meno appariscenti e meno noti, mi sono sembrati degni di essere messi in rilievo.

E' noto che il SEVERI pubblicò due trattati di topologia: il primo dal titolo «Conferenze di Geometria Algebrica» (1) contiene le lezioni da Lui tenute presso l'Università di Roma negli anni accademici 1927 - 28 e 1928 - 29 e fu redatto da Beniamino SEGRE, mentre il secondo dal titolo «Topología» (2) raccoglie in spagnolo le conferenze da Lui tenute dal maggio al luglio del 1930 a Buenos Aires.

(1) Stabilimento Tipo-Litografico del Genio Civile, Roma, 1927 - 30.

(2) Imprenta de la Universidad, Buenos Aires, 1931.

I due libri hanno molti punti di contatto e si riferiscono in gran parte alla topologia del continuo (l'allora topologia generale) ed alla topologia combinatoria, seguendo da vicino la trattazione «Analysis situs» del VEBLEN. tuttavia – come dice lo stesso SEVERI nelle Conferenze di Geometria Algebrica – la Sua «rielaborazione . . . si distacca sia dalle trattazioni astratte e minuziose che nulla domandano all'intuizione, sia da quelle, soverchiamente affrettate, che troppo invece dall'intuizione pretendono» (3); «I concetti ed i processi fondamentali sono stati largamente ripensati e rimaneggiati da un punto di vista personale» (4). Ora sono appunto questi Suoi contributi personali e queste Sue considerazioni critiche anche su argomenti elementari che hanno attirato la mia attenzione, tanto più che talvolta m'è pure stato possibile seguire l'evoluzione del Suo pensiero nella ricerca della dimostrazione più facile e più intuitiva.

1. Un primo problema trattato dal SEVERI riguarda l'invarianza topologica dei concetti di dimensione, di contorno e di punto interno di una varietà topologica. In quest'ordine di idee il NETTO aveva dimostrato per primo che non esiste alcun omeomorfismo, vale a dire alcuna corrispondenza biunivoca e bicontinua tra un quadrato ed un segmento, osservando che la corrispondenza biunivoca tra i punti di un quadrato ed i punti di un segmento stabilita dal CANTOR non poteva essere continua. In seguito il LÜROTH provò nel 1893 l'impossibilità di costruire un omeomorfismo tra la retta reale ed il piano reale e poi dimostrò nel 1907 che vale un risultato analogo nel caso del piano reale e dello spazio reale. Infine l'invarianza topologica del concetto di dimensione fu provata in generale dal LEBESGUE nel 1911 con il suo *teorema delle pavimentazioni*. Tale dimostrazione, che non era esente da errori, fu corretta nel 1913 dal BROUWER ed in seguito semplificata dallo stesso LEBESGUE nel 1924. Ora il SEVERI, nella conferenza «Sobre el concepto de dimensión de un continuo» tenuta a Barcellona nel maggio del 1929 (5) e nei suoi due libri di topologia, presentò delle dimostrazioni semplici ed elementari dei teoremi di NETTO, di LÜROTH e di LEBESGUE-BROWER, utilizzando come unico punto d'appoggio il teorema di JORDAN generalizzato (di BROUWER-LEBESGUE).

Prima di esporre brevemente le dimostrazioni del SEVERI, ricordo l'enunciato del teorema di JORDAN: *Una curva chiusa omeomorfa alla circonferenza divide il piano reale in due regioni connesse per archi: la prima limitata, formata dai punti interni alla curva, e la seconda illimitata formata dai punti esterni. Inoltre ogni arco che unisce un punto interno ad un punto esterno incontra la curva chiu-*

(3) pag. 84.

(4) pag. 1.

(5) Asociación Española para el Progreso de las Ciencias, 1931, pp. 101 - 107.

sa almeno in un punto.

Si ha allora successivamente:

TEOREMA di NETTO: *Non esiste alcun omeomorfismo tra un segmento e un quadrato.*

Infatti ogni figura geometrica convessa omeomorfa ad un segmento è un segmento.

PRIMO TEOREMA di LUROTH: *Non esiste alcun omeomorfismo tra il piano reale e la retta reale.*

Infatti un tale omeomorfismo dovrebbe subordinare come restrizione un omeomorfismo tra un quadrato ed un segmento. Ma ciò è contro il teorema di NETTO.

SECONDO TEOREMA di LÜROTH: *Non esiste alcun omemorfismo tra lo spazio reale ed il piano reale.*

Nelle «*Conferenze di Geometria Algebrica*» il SEVERI dimostrò soltanto la seguente proprietà particolare: *Non esiste alcun omeomorfismo tra un insieme spaziale di punti ed un insieme piano di punti, qualora ad un punto interno del primo corrisponda un punto interno del secondo* (6).

Invece nella conferenza: «*Sobre el concepto de dimensión de un continuo*» provò che *un insieme spaziale di punti, avente un interno non vuoto, non può mai essere omeomorfo ad un insieme piano di punti.* Di qui segue subito il secondo teorema di LÜROTH.

TEOREMA DEI PUNTI INTERNI: *Siano I ed I' due insiemi piani omeomorfi. Allora se l'interno di I non è vuoto, pure l'interno di I' non è vuoto e ad ogni punto interno di I corrisponde un punto interno di I', e viceversa.*

Nel libro «Topología» (7) il SEVERI ottenne tale risultato, provando che, considerati un cerchio (chiuso) formato di punti interni di I, la sua circonferenza γ e la curva chiusa di Jordan γ' corrispondente a γ, si ha successivamente:

1) a punti interni a γ corrispondono punti interni a γ';

2) ogni punto interno a γ' è immagine di un punto interno a γ.

Dall'invarianza dei punti interni segue poi subito l'invarianza dei punti di contorno.

I due ultimi teoremi si estendono immediatamente al caso generale: è sufficiente considerare nello spazio reale R^n una varietà omeomorfa ad una ipersuperficie sferica n-1-dimensionale, in luogo della curva chiusa di JORDAN, ed applicare il teorema di JORDAN generalizzato, anziché il semplice teorema di JORDAN sopra citato. Questo è appunto ciò che fece il SEVERI in «Topología», dove diede

(6) pp. 386 - 388.

(7) pp. 39 - 43.

subito la dimostrazione del teorema dei punti interni in generale, ed osservò inoltre che il teorema della dimensione di LEBESGUE-BROUWER (generalizzazione del teorema di LÜROTH) è pure conseguenza del teorema dell'invarianza topologica dei punti interni.

Come si vede da quanto ho esposto le dimostrazioni del SEVERI sono molto semplici ed intuitive, tuttavia hanno il difetto – almeno nel caso generale – di fondarsi sul teorema di JORDAN generalizzato, la cui dimostrazione non è né facile né elementare.

In quegli anni il SEVERI sperava che si potesse trovare una dimostrazione non troppo complicata del teorema di JORDAN generalizzato e nel trattato «Topología», dopo aver dato una traccia di una dimostrazione elementare del teorema di JORDAN, scrisse: «El concepto de la demostración expuesta del teorema de Jordan en el plano, se puede trasportar al teorema de Jordan en un S_n $(n > 2)$. Y es sobre todo, para encausar las investigaciones de los estudiosos en este campo, que hemos expuesto las precedents consideraciones, porque nos parece necesario obtener del teorema general demostraciones más simples y más completas en todos sus detalles que las conocidas (Brouwer, Lebesgue, etc.).» (8)

Prima di passare ad altro argomento devo aggiungere che attualmente la dimostrazione più agevole del teorema dell'invarianza topologica della dimensione è data da un «teorema delle pavimentazioni» ottenuto mediante l'utilizzazione di un lemma elementare di carattere combinatorio: il cosiddetto lemma di SPERNER (1928).

2. Una seconda questione considerata dal SEVERI consiste nel determinare *una definizione di punto semplice per una varietà topologica*, che si accordi con l'idea intuitiva che tutti ne abbiamo, vale a dire di un punto della varietà, dotato di spazio lineare tangente, per cui la proiezione ortogonale di un intorno opportuno del punto sullo spazio tangente si compia biunivocamente. Questo problema, appena accennato nei due trattati di topologia, viene sviluppato diffusamente nella Sua nota «Su alcune questioni di topologia infinitesimale» del 1931 (9).

Ora, se si definisce per un punto O di una varietà topologica n-dimensionale M_n lo spazio S_n tangente, ponendo la sola condizione che esso debba contenere tutte le rette tangenti, non ne segue necessariamente che la proiezione ortogonale dell'intorno del punto O sullo S_n tangente si effettui in modo biunivoco. Ad esempio, i punti cuspidali o tacnodali di una curva o di una superficie provano l'insufficienza della precedente definizione, perché l'esistenza di un'unica retta

(8) pag. 34.

(9) Annales de la Société Polonaise de Mathématiques, (9), 1931, pp. 97 - 108.

tangente o di un unico piano tangente non implica la biunivocità tra l'intorno del punto e la proiezione dell'intorno. Nel caso della superficie il VALIRON aveva ottenuto la biiettività della detta proiezione, richiedendo in più l'esistenza di almeno due piani per O, seganti la superficie in un intorno di O secondo curve di JORDAN semplici (1926). Il SEVERI, invece, prendendo in esame le corde improprie della varietà M_n, definì *punto semplice* per la varietà un suo punto O, tale che tutte le corde improprie di M_n passanti per O giacciano in uno stesso spazio lineare S_n, e chiamò questo S_n spazio tangente ad M_n in O, in quanto le rette tangenti sono in particolare delle corde improprie. In tal modo il SEVERI rispose in modo esauriente alla questione, perché è immediato provare che l'intorno di un punto O della varietà M_n si proietta in modo biunivoco sopra l'S_n che contiene tutte le tangenti in O, allora e soltanto allora che questo S_n contiene pure tutte le corde improprie di M_n passanti per O. L'eccezione dei punti cuspidali o tacnodali sopra considerata è ora eliminata, perché, ad esempio nel caso di una superficie, le tangenti stanno in un piano, mentre le corde improprie invadono la stella che ha per centro il punto.

Gli esempi che ho illustrato sui contributi del Nostro alla topologia hanno avuto, volutamente, carattere di semplicità a causa dell'eterogeneità dell'uditorio. Spero tuttavia di aver dato egualmente modo ai presenti di valutare l'importanza della figura del SEVERI, che ha lasciato tracce imponenti e durevoli non solo in topologia, ma in ogni campo della matematica di cui ha avuto occasione di occuparsi nella Sua lunga attività di studioso.

ALBERTO CONTE

SVILUPPI RECENTI DELL'OPERA DI FRANCESCO SEVERI: TEORIA DELL'INTERSEZIONE, GEOMETRIA NUMERATIVA, CURVE ALGEBRICHE

E' fuori di dubbio che l'opera di Fracesco Severi è stata quella che più ha influenzato la geometria algebrica nel nostro secolo. Se si considera che cosa era questa disciplina nel 1900 quando Severi pubblicò i suoi primi lavori e la si paragona con ciò che era diventata nel 1961 quando, poco prima di morire, vedevano la luce i suoi ultimi contributi, ci si può rendere agevolmente conto degli enormi progressi compiuti. Apparirà allora chiaro come non ci sia parte della geometria algebrica in cui Severi non abbia lasciato la sua impronta geniale, alcune di esse creandole dal nulla, come la teoria della base o quella delle serie di equivalenza, altre completandole con la dimostrazione di risultati di grande portata, come la teoria delle superficie algebriche o quella dei sistemi continui di curve.

Vi è però una caratteristica dell'opera di Severi che supera, forse, in importanza gli stessi grandiosi risultati da lui ottenuti e che è il vero segno distintivo del genio matematico. Intendiamo riferirci al fatto che le sue idee, le sue geniali intuizioni sono ancora vive a quesi vent'anni dalla sua morte e continuano a essere fonti di ispirazione e di guida per molte delle ricerche che vengono compiute oggi. Ciò è tanto più notevole perché, nel periodo che va dal 1940 al 1970, la geometria algebrica aveva imboccato una strada che sembrava doverla condurre molto lontano da quelle che erano le concezioni di Severi. Oggi ci si è resi però conto che anche le costruzioni astratte più ardite sono impotenti se non sono guidate dall'intuizione geometrica. Francesco Severi, come gli altri grandi geometri algebrici italiani, la possedeva in sommo grado. E oggi che gli strumenti tecnici a nostra disposizione sono tanto più potenti, molte delle idee che Severi aveva appena abbozzato hanno potuto essere realizzate e trasformate in dimostrazioni rigorose.

In questa conferenza vorrei esporre due esempi recentissimi di quanto ho affermato circa l'influenza delle idee di Severi sulla ricerca contemporanea. Essi sono tratti entrambi dalla geometria numerativa, che Severi aveva appreso a Torino alla scuola di Corrado Segre e di cui rimase maestro insuperato nel

corso di tutta la sua lunga carriera scientifica.

1. E' noto come uno dei principali contributi di Severi alla geometria numerativa sia stata la «geometrizzazione» del calcolo di cui Schubert aveva gettato le basi nel suo celebre trattato intitolato «Kalkul der abzählenden Geometrie» [11] e pubblicato nel 1879. In tale contesto gioca un ruolo essenziale il problema di definire l'intersezione $V \cdot W$ di due sottovarietà V, W (di dimensioni rispettivamente r ed s) di una varietà algebrica non-singolare X di dimensione n.

Quando V e W si *intersecano propriamente*, cioè quando ogni componente irriducibile Z_i di $V \cap W$ ha la «giusta» dimensione $r+s-n$, allora il ciclo intersezione può essere definito come:

$$V \cdot W = \sum_i m(Z_i)\, Z_i,$$

dove $m(Z_i)$ è la molteplicità d'intersezione di V e W lungo Z_i. Il problema è quindi ricondotto a quello di definire la molteplicità d'intersezione $m(Z_i)$. Dopo numerosi tentativi (da parte di Severi, Weil, Chevalley e Samuel) Serre diede la formula corretta («formula dei Tor»):

$$m(Z_i) = l_{\mathcal{O}_{z_i}}(\mathcal{O}_V \otimes_{\mathcal{O}_X} \mathcal{O}_W)_{z_i} +$$

$$+ \sum_{j=1}^{\infty} (-1)^j l_{\mathcal{O}_{z_i}} (\mathrm{Tor}_j^{\mathcal{O}_X}(\mathcal{O}_V, \mathcal{O}_W))_{z_i},$$

dove z_i è il punto generico di Z_i.

Quando invece $V \cap W$ ha delle componenti di dimensione maggiore di $r+s-n$, il ciclo intersezione non è più definito in maniera unica. L'approccio tradizionale è quello di muovere V (o W) in una famiglia razionale in modo da trasformarla in un ciclo che intersechi propriamente W (che ciò sia possibile è assicurato dal cosiddetto «moving lemma» di Chow) e di applicare poi la definizione precedente. Naturalmente, poiché V può essere fatta muovere in più di un modo, il ciclo intersezione così costruito non è determinato in maniera unica. Tutti questi cicli sono però fra loro razionalmente equivalenti (nozione dovuta allo stesso Severi) e rimane così ben definita una classe nel gruppo di Chow $CH_{r+s-n}(X)$ dei cicli $(r+s-n)$-dimensionali di X modulo l'equivalenza razionale. L'intersezione fra cicli può quindi essere effettuata sempre a patto che li si sostituisca con le corrispondenti classi di equivalenza dell'anello di Chow:

$$CH(X) = \bigoplus_{i=0}^{n} CH_i(X).$$

Rimane però aperto il problema di definire direttamente $V \cdot W$ senza muovere

prima uno dei due cicli. Ora, è chiaro che $V \cdot W$ sarà ben definito soltanto in $CH_{r+s-n}(V \cap W)$ (cioè, $V \cdot W$ giace in $V \cap W$ ed è ben definito a meno di equivalenza razionale in $V \cap W$), in quanto basta pensare al caso in cui V e W sono una stessa retta di $X = \mathbf{P}^2$ dove l'intersezione può essere uno qualsiasi dei punti di $V = W$.

Severi affermò che questa definizione era possibile e propose di definire $V \cdot W$ come limite per $t \to t_0$ di $V_t \cdot W$, dove $\{V_t\}$ è una famiglia algebrica di cicli algebrici tali che $V_{t_0} = V$ e V_t e W si intersechino propriamente per $t \neq t_0$. Affinché questa costruzione abbia senso, è necessario che:

(i) il ciclo limite sia contenuto in $V \cap W$, e:

(ii) la sua classe in $CH(V \cap W)$ sia indipendente dalla famiglia $\{V_t\}$ scelta.

Quando Severi propose la sua definizione, vi furono aspre controversie circa il rigore del suo procedimento (è rimasta famosa quella scatenata da A. Weil al Congresso internazionale dei Matematici di Amsterdam del 1954). Oggi, però, a distanza di 25 anni, sappiamo che Severi aveva ragione e torto i suoi critici.

W. Fulton e R. MacPherson (cfr. [3] e [4]) hanno infatti provato che la costruzione di Severi fornisce il risultato desiderato per ogni famiglia $\{V_t\}$ (anche non razionale!) di cicli algebrici effettivi.

La teoria di Fulton e MacPherson può essere usata per dare dimostrazioni rapide ed eleganti di numerosi problemi classici di geometria numerativa, come ad esempio il celebre problema di Steiner della detreminazione del numero delle coniche tangenti a cinque coniche date. Un semplice calcolo consente di trovare il numero cercato, che è uguale a 3264.

2. Il secondo problema che vogliamo considerare è tratto dalla teoria delle curve algebriche. E' noto che nella geometria di una curva C di genere g giocano un ruolo fondamentale le serie lineari g_d^r, cioè i sistemi lineari (completi) $|D|$ di dimensione r formati da divisori D di grado d. Appare perciò naturale chiedersi per quali valori di r e di d esistono su C delle g_d^r e, in caso affermativo, quante ce ne sono. Nel caso delle serie complete non-speciali (cioè, il cui indice di pscialità è uguale a zero), il teorema di Riemann-Roch dice che:

$$r = d - g$$

e di qui è facile dedurre che esistono ∞^ρ di tali serie, dove

$$\rho = g - (r+1)(g-d+r) = h^0(K) - h^0(D)\, h^0(K-D),$$

con $h^0(D) = \dim|D| + 1$. Il numero ρ è detto *numero di Brill-Noether* perché furono i due grandi geometri tedeschi a introdurlo nella loro classica memoria [1]. Essi si posero anche il problema dell'esistenza delle serie speciali tentando di dimostrare che su una curva di genere g esistono almeno $\infty^\rho\, g_d^r$ (speciali

o non-speciali) e che su una *generica* curva di genere g ne esistono esattamente ∞^{ρ}. Ricordando che le g_d^r di una curva C sono parametrizzate da una sottovarietà W_d^r della varietà jacobiana $J(C)$ di C, il risultato di Brill-Noether può essere enunciato così:

TEOREMA. (i) *Per ogni curva C*

$$\dim W_d^r \geqslant \rho;$$

(ii) *per una generica curva C*:

$$\dim W_d^r = \rho,$$

con l'intesa che $W_d^r = \phi$ *se* $\rho < 0$.

La dimostrazione di Brill e Noether di questo risultato era incompleta. Una dimostrazione rigorosa dell'enunciato (i) del teorema è stata data recentemente da Kempf [6] e da Kleiman e Laksov [7], [8].

La storia della dimostrazione dell'enunciato (ii) è più complicata. Castelnuovo, in [2], tentò di dimostrarlo facendo degenerare la curva generica C in una di quelle che oggi sono dette appunto «curve di Castelnuovo», cioè in una curva razionale C_0 di genere g con g punti doppi ordinari, senza però riuscire a completare il suo ragionamento.

L'idea di Castelnuovo fu ripresa da Severi in una delle famose appendici alle sue «Vorlesungen über Algebraische Geometrie» [12], l'Anhang *G*. Qui egli espone una possibile linea di dimostrazione della (ii) riducendola sostanzialmente alla seguente congettura:

siano $C \subseteq \mathbf{P}^d$ *una curva razionale normale di grado d, l una sua corda e* $\sigma(l) \subseteq G(k, d)$ *il ciclo di Schubert formato dai* $\mathbf{P}^k$ *di* $\mathbf{P}^d$ *che incontrano l. Allora, date comunque g corde generiche* $l_1, \ldots, l_g$ *di C, l'intersezione* $\sigma(l_1) \cap \ldots \cap \sigma(l_g)$ *è quasi ovunque trasversale. In particolare, essa è priva di componenti multiple e ha dimensione uguale a* $(k+1)(d-k) - g(d-k-1)$, *con l'intesa che l'intersezione sia vuota se quest'ultimo numero è negativo.*

Si noti che, per $k = d - r - 1$, la dimensione precedente è uguale a ρ, e in effetti l'idea di Severi si basa sul fatto che c'è corrispondenza biunivoca fra le g_d^r di C_0 e i $\mathbf{P}^{d-r-1}$ che incontrano le g corde della sua normalizzata che uniscono le coppie di punti provenienti dai g punti doppi.

Anche in questo caso l'intuizione geometrica di Severi doveva rivelarsi infallibile. Il suo ragionamento di riduzione della (ii) alla congettura precedente è stato stabilito rigorosamente da Kleiman [9]. E proprio recentemente, pochi mesi fa, J. Harris e P. Griffiths hanno dimostrato, in [5], la congettura di Severi, chiudendo così un problema che era rimasto aperto per 105 anni.

BIBLIOGRAFIA.

[1] BRILL A. e NOETHER M., *Uber die algebraischen Functionen und ihre Anwendungen in der Geometrie*, Math. Annalen, 7 (1874), 269 - 310.

[2] CASTELNUOVO G., *Numero delle involuzioni razionali giacenti sopra una curva di dato genere*, Rendiconti della R. Acc. dei Lincei, s. IV, vol. V (1889).

[3] FULTON W., MACPHERSON R., *Intersecting cycles on an algebraic variety* in *Real and Complex Singularities, Oslo 1976*, Sijthoff and Noordhoff, Amsterdam 1978, 179 - 97.

[4] FULTON W., MACPHERSON R., *Defining algebraic intersections* in *Algebraic Geometry, Tromsø 1977*, Springer Lecture Notes n. 687, 1 - 30.

[5] GRIFFITHS P., HARRIS J., *The dimension of the variety of special divisors on an algebraic curve*, preprint.

[6] KEMPF G., *Schubert methods with an application to algebraic curves*, Pub. Math. Centrum, Amsterdam 1971.

[7] KLEIMAN S., LAKSOV D., *On the existence of special divisors*, Amer. J. of Math., 94 (1972), 431 - 36.

[8] KLEIMAN S., LAKSOV D., *Another proof of the existence of special divisors*, Acta Math., 132 (1974), 163 - 76.

[9] KLEIMAN S., *r-special subschemes and an argument of Severi's*, Advances in Math., 22 (1976), 1 - 23.

[10] LAKSOV D., *Appendix to preceding paper by Kleiman*, Advances in Math., 22 (1976), 23 - 31.

[11] SCHUBERT H., *Kalkul der abzählenden Geometrie*, Teubner, Leipzig 1879.

[12] SEVERI F., *Vorlesungen über algebraische Geometrie*, Teubner, Leipzig 1921.

PLACIDO CICALA

SU UN SISTEMA D'EQUAZIONI CON UN PARAMETRO EVANESCENTE

In questa Comunicazione non si presenta uno studio compiuto, bensì un argomento di indagine, affinché a chi non è matematico, ma studioso di problemi d'ingegneria, sia offerto aiuto dai matematici interessati al Convegno, secondo l'esempio dei Maestri che qui si onorano e che tanto insegnarono agli ingegneri.

1. Si considera un sistema di N equazioni differenziali, il cui termine incognito generico si scrive nella forma

$$(a + b\,\partial_1 + c\,\partial_2)V \tag{1}$$

essendo V la generica incognita, funzione delle coordinate (aventi dimensioni di lunghezze) ξ_1, ξ_2, rispetto alle quali ∂_1, ∂_2 sono le derivazioni. Si omettono qui gli indici, da 1 a N, delle variabili V e i doppi indici dei coefficienti a, b, c.

Equazioni di questa forma si presentano nella teoria lineare bidimensionale delle pareti sottili elastiche, formulata in termini di sforzi e spostamenti. Generalmente, rinunciando a verificare in ogni punto del corpo le condizioni di equilibrio e di elasticità, il numero N viene limitato introducendo appropriate ipotesi. Qualora si voglia evitare il carattere in certa misura arbitrario di questo procedimento, si deve affrontare il sistema con $N \to \infty$ che si ottiene sviluppando le incognite (poniamo, 3 componenti dello spostamento e 6 del tensore degli sforzi) in serie di funzioni della terza coordinata ζ misurata secondo la minore dimensione (spessore) della parete. Per seguire questa via si introduce un parametro δ e si esamina il comportamento delle incognite per $\delta \to 0$ dopo avere legato a δ lo spessore $h \simeq L_0 \delta$ ed eventualmente altre dimensioni della parete, essendo L_0 una lunghezza fissa. Assegnati gli ordini di grandezza degli operatori di derivazione mediante le relazioni

$$\partial_1 \simeq \frac{1}{L_0 \delta^\alpha}, \qquad \partial_2 \simeq \frac{1}{L_0 \delta^\beta} \tag{2}$$

e gli ordini di grandezza dei termini noti in base all'esponente di δ che ne misura

la variazione per $\delta \to 0$, si ricercano gli esponenti relativi alle quantità incognite per un integrale particolare del sistema corrispondente alla situazione in esame. Il procedimento adottato per la risoluzione di problemi al contorno in base ai risultati di tale indagine è indicato altrove (1): rispetto a quel lavoro, si presentano qui alcune modifiche al processo esecutivo, volte a renderlo più diretto.

2. Nelle considerazioni che seguono ci riferiamo alla costruzione dei sistemi di prima approssimazione per le classi di soluzioni relative a valori $\alpha, \beta \geqslant 0$.

Diciamo *sistema caratteristico* quello che si ottiene sostituendo nelle espressioni (1) gli operatori ∂_1, ∂_2 con fattori algebrici X, Y: sia $[M]$ la matrice dei coefficienti del sistema. Siano $\mu(i,j)$, $\nu(i,j)$ gli esponenti di δ che danno gli ordini di grandezza dell'elemento di $[M]$ (ossia il minore dei valori corrispondenti ai tre termini in parentesi in (1) per la classe in esame) e, rispettivamente, dell'elemento di $[M]^{-1}$, situati nella riga i e colonna j. Il calcolo degli esponenti ν si effettua facilmente per dimensioni $N \times N$ non eccessive delle matrici (2): infatti, ad es., l'esponente relativo allo sviluppo del determinante di $[M]$ si ottiene dall'espressione $\Sigma\, \mu(i,j)$ dando a i la successione di valori da 1 a N e a j quelli della loro permutazione che minimizza la sommatoria. Col crescere di N il tempo di elaborazione, anche con calcolatori di elevate prestazioni, diventa proibitivo. Fortunatamente, per il problema in questione, la presenza nella matrice $[M]$ di sottomatrici 9×9 che si ripetono lungo le diagonali ha permesso di risolvere il caso $N \to \infty$: infatti si ottiene per $\alpha > \beta$ la relazione

$$(3) \qquad V_{n+2} \simeq \{V\}_n \delta^{2-2\alpha}$$

nella quale figurano in colonne di 9 elementi le componenti negli sviluppi in polinomi di Legendre per le grandezze sopra indicate. La relazione vale da un certo ordine n del polinomio in avanti.

I valori $\nu(1,k) \div \nu(N,k)$ danno la classificazione delle incognite per un carico unitario nell'equazione k.ma del sistema caratteristico, valida anche per la soluzione corrispondente del sistema originario. Per tale tipo di soluzione è facile individuare i termini fondamentali dell'equazione i.ma generica (quelli, cioè, per i quali l'espressione $\mu(i,j) + \nu(j,k)$ assume il valore più basso): corrispondentemente si può porre il sistema in forma triangolare per il calcolo di prima approssimazione della successione di incognite. La diagonale del sistema può essere

(1) *Systematic approximation approach to linear shell theory*, Levrotto & Bella, Torino, 1965.

(2) F. Algostino, G. F. Del Col, *Sistemi lineari con parametro tendente a zero*, Atti Ist. Sc. d. Costruz. Polit. Torino, N° 379.

formata da semplici elementi o da sottomatrici (quadrate). Nel primo caso sussistono le relazioni

$$\mu(i,j) + \nu(j,k) \geqslant \mu(i,i) + \nu(i,k) \tag{4}$$

il segno di eguaglianza dovendo riscontrarsi almeno per un valore $j < i$. Con questa considerazione si prolunga indefinitamente la classificazione delle incognite iniziata mediante l'uso del calcolatore: per la struttura considerata si ottiene così la relazione (3).

3. E' presumibile che la determinazione dei valori ν in base alla proprietà (4) sin dalla parte iniziale del sistema semplifichi il programma rispetto al procedimento adottato, per sviluppo di determinanti. Questo faciliterebbe l'applicazione a problemi dove la semplificazione che conduce alla (3) non sussista.

Un più completo esame delle relazioni fra i vari schemi triangolari, con particolare riguardo agli elementi (o sottomatrici) che si dispongono lungo la diagonale sarebbe opportuno; di fatti, la presenza di sistemi differenziali in questa posizione stabilisce l'ordine complessivo del sistema e la conseguente possibilità di costruire soluzioni omogenee della classe α, β considerata, necessarie nella risoluzione di problemi al contorno.

Una estensione di questi procedimenti a strutture riducibili a unidimensionali (travi o verghe), con considerazione di spostamenti finiti, sia pure con deformazioni piccolissime, sarebbe auspicabile.

ALDO ANDREOTTI, MAURO NACINOVICH

SOPRA IL «LEMMA DI POINCARE'» PEI COMPLESSI DI OPERATORI DIFFERENZIALI

1. *Complessi di Operatori Differenziali.* Sia Ω un aperto di $\boldsymbol{R}^n$ e sia $\mathrm{E}(\Omega)$ lo spazio delle funzioni C^∞ definite in Ω a valori complessi. Sia

$$A(x, D) = (a_{ij}(x, D))_{1 < i < q,\, 1 < j < p}$$

una matrice di tipo $p \times q$ di operatori differenziali a coefficienti C^∞ in Ω. (Qui $D = (\partial/\partial x_1, \dots, \partial/\partial x_n), x_1, \dots, x_n$ essendo le coordinate cartesiane in $\boldsymbol{R}^n$). Quindi A definisce una applicazione lineare

$$\mathrm{E}^p(\Omega) \xrightarrow{A(x, D)} \mathrm{E}^q(\Omega)$$

avendo indicato con $\mathrm{E}^p(\Omega)$ lo spazio $\mathrm{E}(\Omega) \times \dots \times \mathrm{E}(\Omega)$ p volte e analogamente per $\mathrm{E}^q(\Omega)$. Consideriamo l'equazione

$$A(x, D)\, u = f \tag{1}$$

per f in $\mathrm{E}^q(\Omega)$ dato ed u in $\mathrm{E}^p(\Omega)$ come incognita.

Cadono acconce le seguenti due osservazioni:

1°. Assumiamo che (1) sia risolubile. Sia

$$S(x, D) = (s_1(x, D), \dots, s_q(x, D))$$

una riga di operatori differenziali a coefficienti C^∞ definiti in Ω e tali che

$$S(x, D)\, A(x, D) = 0.$$

Allora dovremo anche avere che

$$S(x, D) f = 0.$$

I vettori $S(x, D)$ suddetti si chiamano le *condizioni di integrabilità* per l'equazione (1); il dato f della (1) deve soddisfare tutte le equazioni $S(x, D) f = 0$.

2°. Assumiamo che (1) sia risolubile. Sia

$$R(x,D) = \begin{pmatrix} r_1(x,D) \\ \vdots \\ r_p(x,D) \end{pmatrix}$$

una colonna di operatori differenziali a coefficienti C^∞ in Ω e tali che

$$A(x,D)\,R(x,D) = 0.$$

Allora, se u è una soluzione della (1) anche

$$u + R(x,D)\,v \quad \text{per ogni} \quad v \in \mathbf{E}(\Omega)$$

è soluzione della (1). I vettori $R(x,D)$ suddetti si chiamano le *condizioni di cointegrabilità* dell'equazione (1).

Sia $D(\Omega)$ l'anello (non commutativo) degli operatori differenziali a coefficienti C^∞ in Ω. Supponiamo che sia le condizioni di integrabilità che quelle di cointegrabilità considerate come $D(\Omega)$-moduli (il primo a sinistra, il secondo a destra) siano di tipo finito. Scrivendo una base delle condizioni di integrabilità (una sotto l'altra) e una base delle condizioni di cointegrabilità (una accanto all'altra) si ottengono due nuove matrici $B(x,D)$ e $C(x,D)$ di operatori differenziali, onde avremo una successione di applicazioni lineari della forma:

$$\mathbf{E}^s(\Omega) \xrightarrow{C(x,D)} \mathbf{E}^p(\Omega) \xrightarrow{A(x,D)} \mathbf{E}^q(\Omega) \xrightarrow{B(x,D)} \mathbf{E}^r(\Omega) \tag{2}$$

per r ed s opportuni. Risulta $A(x,D)\,C(x,D) = 0$ e $B(x,D)\,A(x,D) = 0$ cioè la successione (2) è un complesso (ossia il prodotto di due successivi operatori è nullo). Possiamo concludere dicendo che «Lo studio dei sistemi di equazioni a derivate parziali porta naturalmente allo studio di complessi di operatori differenziali» (cf. [1]).

2. *Il lemma di Poincaré.* Sia dunque

$$\mathbf{E}^{p_0}(\Omega) \xrightarrow{A^0(x,D)} \mathbf{E}^{p_1}(\Omega) \xrightarrow{A^1(x,D)} \mathbf{E}^{p_2}(\Omega) \xrightarrow{A^2(x,D)} \dots \tag{3}$$

un complesso di operatori differenziali a coefficienti C^∞ in Ω;

$$A^{j+1}(x,D)\,A^j(x,D) = 0 \quad \text{per} \quad j = 0, 1, \dots$$

Sia $x_0 \in \Omega$ e sia

$\mathbf{E}_{x_0}$ = lo spazio dei germi di funzioni C^∞ in x_0

Φ_{x_0} = lo spazio delle serie formali in $x - x_0$

$\mathbf{A}_{x_0}$ = lo spazio dei germi di funzioni analitiche in x_0.

Diremo che il complesso (3) *ammette il lemma di Poincaré* nel punto x_0 se la successione

$$\mathrm{E}_{x_0}^{p_0} \xrightarrow{A^0(x,D)} \mathrm{E}_{x_0}^{p_1} \xrightarrow{A^1(x,D)} \mathrm{E}_{x_0}^{p_2} \xrightarrow{A^2(x,D)} \dots$$

è esatta. Ciò significa che «per ogni $j = 0, 1, \dots,$ le condizioni di integrabilità $A^{j+1}(x, D)$ per l'operatore $A^j(x, D)$ sono sufficienti, localmente nelle vicinanze di x_0, ad assicurare la risolubilità dell'equazione $A^j(x, D)\, u = f$».

Analogamente (sostituendo negli operatori $A^j(x, D)$ i coefficienti con le loro serie di Taylor in x_0) si può considerare il complesso:

$$\Phi_{x_0}^{p_0} \xrightarrow{A^0(x,D)} \Phi_{x_0}^{p_1} \xrightarrow{A^1(x,D)} \Phi_{x_0}^{p_2} \xrightarrow{A^2(x,D)} \dots$$

Se questa successione è esatta, diremo che il complesso (3) *ammette il Lemma di Poincaré formale* nel punto x_0.

Finalmente, qualora gli operatori $A^j(x, D)$ abbiano i coefficienti analitici in Ω, possiamo anche considerare la successione

$$\mathrm{A}_{x_0}^{p_0} \xrightarrow{A^0(x,D)} \mathrm{A}_{x_0}^{p_1} \xrightarrow{A^1(x,D)} \mathrm{A}_{x_0}^{p_2} \xrightarrow{A^2(x,D)} \dots$$

Se essa è esatta, diremo che il complesso (3) *ammette il Lemma di Poincaré analitico* nel punto x_0.

Esempi. 1° Sia $\mathrm{E}^{(j)}(\Omega)$ lo spazio delle forme differenziali esterne di grado j a coefficienti C^∞ in Ω e sia d il simbolo di differenziazione esterna. Si ha il complesso

$$\mathrm{E}^{(0)}(\Omega) \xrightarrow{d} \mathrm{E}^{(1)}(\Omega) \xrightarrow{d} \mathrm{E}^{(2)}(\Omega) \xrightarrow{d} \dots$$

Risulta $\mathrm{E}^{(j)}(\Omega) = \mathrm{E}^{\binom{n}{j}}(\Omega)$. In ogni punto x_0 questo complesso ammette il lemma di Poincaré, il lemma di Poincaré formale e il lemma di Poincaré analitico. Questo fatto sembra sia stato stabilito per la prima volta da Vito Volterra, onde con maggior esattezza storica il lemma di Poincaré dovrebbe esser chiamato il lemma di Volterra.

2°. In R^2 si consideri il complesso

$$\mathrm{E}^{(0)}(R^2) \xrightarrow{d} \mathrm{E}^{(1)}(R^2) \xrightarrow{\exp(-1/(x^2+y^2))\, d} \mathrm{E}^{(2)}(R^2).$$

Questo, come si verifica subito, ammette il lemma di Poincaré in ogni punto di R^2, ma non ammette il lemma di Poincaré formale all'origine delle coordinate.

3°. In R^1 si consideri il complesso

$$\mathrm{E}(R^1) \xrightarrow{x^2(d/dx)+1} \mathrm{E}(R^1) \to 0$$

a coefficienti analitici. Questo ammette per $x = 0$ il lemma di Poincaré formale ed il lemma di Poincaré (come si può verificare col calcolo). Tuttavia esso non ammette all'origine il lemma di Poincaré analitico: infatti l'equazione

$$x^2 \frac{du}{dx} + u = x^2$$

ammette l'unica soluzione formale

$$u = \sum_1^\infty (-1)^{h+1} h! \, x^{h+1}$$

che non è convergente.

4°. In R^3 si consideri il complesso

$$E(R^3) \xrightarrow{\frac{\partial}{\partial x_1} + i \frac{\partial}{\partial x_2} - 2i(x_1 + ix_2) \frac{\partial}{\partial x_3}} E(R^3) \to 0$$

a coefficienti analitici, definito per mezzo dell'operatore di Hans Lewy. All'origine delle coordinate questo complesso non ammette il lemma di Poincaré, come ha dimostrato H. Lewy in [7]. Tuttavia si verifica agevolmente, mediante il teorema di Cauchy-Kowalewska che questo complesso ammette sia il lemma di Poincaré formale che quello analitico. In conclusione, i tre tipi di lemma di Poincaré rappresentano fenomeni indipendenti l'uno dall'altro.

Osservazione. Non ci è noto se esista un complesso di operatori a coefficienti analitici pel quale valga il lemma di Poincaré ed il lemma di Poincaré analitico, ma non quello formale.

3. *Complessi di Operatori a Coefficienti Costanti.* Consideriamo ora un complesso di operatori a coefficienti costanti

$$(4) \qquad E^{p_0}(\Omega) \xrightarrow{A^0(D)} E^{p_1}(\Omega) \xrightarrow{A^1(D)} E^{p_2}(\Omega) \xrightarrow{A^2(D)} \dots$$

Sia $\xi = (\xi_1, \dots, \xi_n)$ un sistema di indeterminate e sia $P = C[\xi_1, \dots, \xi_n]$ l'anello dei polinomi in quelle indeterminate. Poiché $A^{j+1}(D) A^j(D) = 0$, risulta che ${}^tA^j(\xi)\, {}^tA^{j+1}(\xi) = 0$, onde la successione di P-omomorfismi:

$$(5) \qquad P^{p_0} \xleftarrow{{}^tA^0(\xi)} P^{p_1} \xleftarrow{{}^tA^1(\xi)} P^{p_2} \xleftarrow{{}^tA^2(\xi)} \dots$$

è un complesso. Vale il teorema seguente [2]:

TEOREMA. *Sia Ω un aperto convesso non vuoto. Condizione necessaria e sufficiente perché la successione* (4) *sia esatta è che sia esatta la successione* (5).

I complessi (4) per cui la (5) è esatta si chiamano complessi di Hilbert inquantoché, se $N = \operatorname{coker} {}^tA^0(\xi)$, la successione esatta

$$(6) \qquad 0 \leftarrow N \leftarrow P^{p_0} \xleftarrow{{}^tA^0(\xi)} P^{p_1} \xleftarrow{{}^tA^1(\xi)} P^{p_2} \xleftarrow{{}^tA^2(\xi)} \dots$$

è una «risoluzione di Hilbert del P-modulo N».

Pei complessi di Hilbert vale il lemma di Poincaré in virtù del teorema precedente in ogni punto x_0 di R^n. Si dimostra altresì che pei medesimi complessi vale in ogni punto di R^n il lemma di Poincaré formale [3] e il lemma di Poincaré analitico [4].

Osserviamo infine come, dato un qualunque operatore differenziale a coefficienti costanti $A^0(D)$, la costruzione d'una risoluzione di Hilbert (6) che estenda la successione

$$0 \leftarrow N \leftarrow \mathrm{P}^{p_0} \xleftarrow{{}^tA^0(\xi)} \mathrm{P}^{p_1}$$

ove $N = \operatorname{coker} {}^tA^0(\xi)$ permetta di costruirci un complesso di Hilbert (4) che cominci con l'operatore $A^0(D)$.

Si può dimostrare l'enunciato seguente (cf. [2] e [3]):

«Dato un complesso (4) di operatori differenziali a coefficienti costanti, se in un punto x_0 di R^n vale uno dei tre lemmi di Poincaré, allora il complesso (4) è un complesso di Hilbert».

In conclusione pei complessi di operatori a coefficienti costanti i buoni complessi sono i complessi di Hilbert la cui costruzione è ricondotta al problema puramente algebrico della costruzione della risoluzione di Hilbert di un P-modulo.

4. *Complessi di Operatori a Coefficienti Variabili.* a) Lo studio dei complessi di operatori differenziali a coefficienti C^∞ si può ricondurre in certa misura allo studio dei complessi di operatori differenziali a coefficienti costanti attraverso la nozione di «simbolo» di un operatore differenziale. Sia

$$A(x,D) = (a_{ij}(x,D))_{1 \leqslant i \leqslant q,\, 1 \leqslant j \leqslant p}$$

un operatore diffrenziale a coefficienti C^∞ definiti in un aperto Ω di $R^n : A(x,D) : : \mathrm{E}^p(\Omega) \to \mathrm{E}^q(\Omega)$.

Supponiamo fissate delle successioni di interi

$$a_1, a_2, \dots, a_p \quad \text{per} \quad \mathrm{E}^p(\Omega)$$

$$b_1, b_2, \dots, b_q \quad \text{per} \quad \mathrm{E}^q(\Omega)$$

di modo che si possa scrivere (con le solite convenzioni di notazione):

$$a_{ij}(x,D) = \sum_{|\alpha| \leqslant a_j - b_i} a_{ij,\alpha}(x)\, D^\alpha$$

cosicché in ogni punto di Ω l'operatore $a_{ij}(x,D)$ risulta di ordine $\leqslant a_j - b_i$. Poniamo:

$$\hat{a}_{ij}(x, \xi) = \sum_{|\alpha| = a_j - b_i} a_{ij,\alpha}(x)\, \xi^\alpha$$

e chiamiamo simbolo dell'operatore $A(x, D)$ di multigradi (a_j, b_i) la matrice di polinomi a coefficienti in $E(\Omega)$

$$\hat{A}(x, \xi) = (\hat{a}_{ij}(x, \xi)).$$

Sia $B(x, D) : E^q(\Omega) \to E^r(\Omega)$ un secondo operatore differenziale a coefficienti C^∞ su Ω, $B(x, D) = (b_{hi}(x, D))_{1 \leq h \leq r,\, 1 \leq i \leq q}$. Fissiamo una terza successione di interi $c_1, c_2, \ldots, c_r$ per $E^r(\Omega)$ di modo che

$$b_{hi}(x, D) = \sum_{|\alpha| \leq b_i - c_h} b_{hi,\alpha}(x)\, D^\alpha$$

sia di ordine $\leq b_i - c_h$ su Ω. Sia

$$\hat{B}(x, \xi) = \sum_{|\alpha| = b_i - c_h} b_{hi,\alpha}(x)\, \xi^\alpha$$

il simbolo di $B(x, D)$ di multigrado (b_i, c_h), risulta allora che «per l'operatore $B(x, D)\, A(x, D) : E^p(\Omega) \to E^r(\Omega)$ si può considerare il simbolo di multigrado (a_j, c_h) e risulta

$$B \circ A(x, \xi) = \hat{B}(x, \xi)\, \hat{A}(x, \xi)».$$

b) Sia dato ora su Ω un complesso di operatori differenziali a coefficienti C^∞

$$E^{p_0}(\Omega) \xrightarrow{A^0(x, D)} E^{p_1}(\Omega) \xrightarrow{A^1(x, D)} E^{p_2}(\Omega) \xrightarrow{A^2(x, D)} \ldots \tag{3}$$

e supponiamo che per ogni intero $j \geq 0$ l'ordine dell'operatore $A^j(x, D)$ sia limitato su Ω. Si scelgano multigradi

$a_j \quad 1 \leq j \leq p_0$ per $E^{p_0}(\Omega)$

$b_i \quad 1 \leq i \leq p_1$ per $E^{p_1}(\Omega)$

$c_h \quad 1 \leq h \leq p_2$ per $E^{p_2}(\Omega)$

. . . .

tali che si possa considerare il simbolo $\hat{A}^0(x, \xi)$ di $A^0(x, D)$ di multigrado (a_j, b_i), il simbolo $\hat{A}^1(x, \xi)$ di $A^1(x, D)$ di multigrado (b_i, c_h), . . .

Per x_0 fissato, si può allora considerare la successione di operatori differenziali a coefficienti costanti

$$E^{p_0}(R^n) \xrightarrow{\hat{A}^0(x_0, D)} E^{p_1}(R^n) \xrightarrow{\hat{A}^1(x_0, D)} E^{p_2}(R^n) \to \ldots \tag{6}$$

Questa successione è un complesso, dato che (3) è un complesso, in virtù della proprietà moltiplicativa del simbolo menzionata sopra. Il complesso (6) si chiamerà il *complesso simbolico* nel punto x_0 del complesso dato (3). Vale il seguente teorema [5].

TEOREMA. *Assumiamo che gli operatori differenziali del complesso* (3) *abbiano coefficienti analitici in* Ω. *Assumiamo che nel punto* x_0 *di* Ω *il complesso simbolico* (6) *sia un complesso di Hilbert. Allora nel punto* x_0 *vale per il complesso dato il lemma di Poincaré analitico.*

Similmente si ha anche il teorema [5]:

TEOREMA. *Sia* (3) *un complesso di operatori differenziali a coefficienti* C^∞. *Assumiamo che nel punto* x_0 *di* Ω *il complesso simbolico* (6) *sia un complesso di Hilbert. Allora nel punto* x_0 *vale pel complesso dato il lemma di Poincaré formale.*

L'esempio 4° dato sopra con l'operatore di H. Lewy dimostra che le ipotesi ammesse sono insufficienti ad assicurare il lemma di Poincaré in x_0. Infatti in quell'esempio (con graduazioni ovvie) il complesso simbolico all'origine delle coordinate è il complesso a coefficienti costanti:

$$\mathrm{E}(R^3) \xrightarrow{\frac{\partial}{\partial x_1} + i \frac{\partial}{\partial x_2}} \mathrm{E}(R^3) \to 0$$

il quale è un complesso di Hilbert.

5. *Complessi Ellittici.* Sia dato come sopra un complesso (3) di operatori differenziali a coefficienti C^∞ e di ordini limitati su Ω. Supponiamo di aver fissato delle multigradazioni, onde si possono considerare i simboli $\hat{A}^j(x, \xi)$ degli operatori $A^j(x, D)$ del complesso, ad esse corrispondenti. Sia x_0 un punto di Ω. *Diremo che il complesso dato* (3) *è ellittico nel punto* x_0 *se la successione (complesso)*

$$C^{p_0} \xrightarrow{\hat{A}^0(x_0, \xi)} C^{p_1} \xrightarrow{\hat{A}^1(x_0, \xi)} C^{p_2} \xrightarrow{\hat{A}^2(x_0, \xi)} \dots$$

è esatta per ogni scelta di $\xi \in R^n - \{0\}$.

Si dimostra pei complessi ellittici il seguente teorema:

TEOREMA. *Sia il complesso dato* (3) *un complesso di operatori a coefficienti analitici in* Ω. *Assumiamo che nel punto* x_0 *il complesso simbolico* (6) *sia un complesso di Hilbert e il complesso* (3) *sia ellittico nel punto* x_0. *Allora il complesso dato* (3) *ammette il lemma di Poincaré nel punto* x_0.

Osserviamo che il complesso costruito con l'operatore di H. Lewy non è ellittico all'origine delle coordinate.

Si può presumere che quest'ultimo teorema sia valido anche se si suppongono i coefficienti degli operatori del complesso solo di classe C^∞. Per esempio per un complesso corto del tipo

$$\mathrm{E}^p(\Omega) \xrightarrow{E(x,D)} \mathrm{E}^p(\Omega) \to 0$$

ellittico (nel senso di Douglis e Nirenberg) in un punto x_0 di Ω questo fatto è noto [8].

6. *Operatori a Coefficienti Analitici.* a) Sia K un compatto di R^n e sia $\mathrm{A}(K)$ l'anello delle funzioni analitiche definite in qualche intorno di K; due tali funzioni analitiche sono identificate se coincidono su un conveniente intorno di K. Supporremo inoltre che K sia un insieme *semi-analitico*, cioè definito da un numero finito di equazioni $f(x) = 0$ e inequazioni $g(x) \leqslant 0$, con f, g funzioni analitiche reali definite in un intorno U di K. Allora risulta che $\mathrm{A}(K)$ è un anello noetheriano [6]. Sia

$$D_{\mathrm{A}}(K) = \mathrm{A}(K)\left[\frac{\partial}{\partial x_1}, \ldots, \frac{\partial}{\partial x_n}\right]$$

l'anello degli operatori differenziali a coefficienti in $\mathrm{A}(K)$. Questo anello è anche esso noetheriano. Sia $A^0(x,D) = (a_{ij}(x,D))$ una matrice $p_1 \times p_0$ ad elementi in $D_{\mathrm{A}}(K)$; essa definisce una applicazione $D_{\mathrm{A}}(K)$-lineare:

$$D_{\mathrm{A}}(K)^{p_1} \xrightarrow{A^0(x,D)} D_{\mathrm{A}}(K)^{p_0}$$

quando si associ ad ogni riga $v(x,D) = (v_1(x,D), \ldots, v_{p_1}(x,D))$ in $D_{\mathrm{A}}(K)^{p_1}$ la riga $v(x,D)\,A^0(x,D) = w(x,D) = (w_1(x,D), \ldots, w_{p_0}(x,D))$ appartenente a $D_{\mathrm{A}}(K)^{p_0}$. Supponiamo che $A^0(x,D)$ sia di multigrado (a_j, b_i), ossia che ordine $a_{ij}(x,D) \leqslant$ $\leqslant a_j - b_i$. Posto

$$\{D_{\mathrm{A}}(K)^{p_0}\}_h =$$
$$= \{(r_1, \ldots, r_{p_0}) \in D_{\mathrm{A}}(K)^{p_0} \mid \text{ordine } r_j \leqslant a_j + h,\ 1 \leqslant j \leqslant p_0\}$$
$$\{D_{\mathrm{A}}(K)^{p_1}\}_h =$$
$$= \{(s_1, \ldots, s_{p_1}) \in D_{\mathrm{A}}(K)^{p_1} \mid \text{ordine } s_i \leqslant b_i + h,\ 1 \leqslant i \leqslant p_1\}$$

risulta che $A^0(x,D)$ manda $\{D_{\mathrm{A}}(K)^{p_1}\}_h$ in $\{D_{\mathrm{A}}(K)^{p_0}\}_h$ per ogni h.

b) Sia $\mathrm{H}(K) = \mathrm{A}(K)_0[\xi_1, \ldots, \xi_n]$ l'anello graduato dei polinomi omogenei nelle indeterminate ξ a coefficienti in $\mathrm{A}(K)$. Anche questo è un anello noetheriano e si ha un $\mathrm{H}(K)$-morfismo

$$\mathrm{H}(K)^{p_1} \xrightarrow{{}^t\hat{A}^0(x,\xi)} \mathrm{H}(K)^{p_0}$$

definito dal trasposto del simbolo di A^0. Posto

$$\{\mathrm{H}(K)^{p_0}\}_h =$$

$$= \left\{ w = \begin{pmatrix} w_1 \\ \vdots \\ w_{p_0} \end{pmatrix} \in \mathrm{H}(K)^{p_0} \mid w_j \text{ omogeneo di grado } a_j + h,\ 1 \leqslant j \leqslant p_0 \right\}$$

$$\{\mathrm{H}(K)^{p_1}\}_h =$$

$$= \left\{ v = \begin{pmatrix} v_1 \\ \vdots \\ v_{p_1} \end{pmatrix} \in \mathrm{H}(K)^{p_1} \mid v_i \text{ omogeneo di grado } b_i + h,\ 1 \leqslant i \leqslant p_1 \right\}$$

risulta che ${}^t\hat{A}^0(x,\xi)$ manda $\{\mathrm{H}(K)^{p_0}\}_h$ in $\{\mathrm{H}(K)^{p_1}\}_h$ per ogni h.

Dato $v(x,D)$ in $\{D_{\mathrm{A}}(K)^{p_1}\}_h$ risulta $w(x,D) = v(x,D)\,A^0(x,D)$ in $\{D_{\mathrm{A}}(K)^{p_0}\}_k$ per qualche $k \leqslant h$ e se ne può considerare il corrispondente simbolo $\hat{w}(x,\xi) \in \{\mathrm{H}(K)^{p_0}\}_k$. Diremo che l'operatore $A^0(x,D)$ è *involutivo* se

$$\widehat{{}^t\mathrm{Im}\, A^0(x,D)} = \mathrm{Im}\ {}^t\hat{A}^0(x,\xi),$$

ossia se i trasposti dei simboli $\hat{w}(x,\xi)$ degli elementi $w(x,D) = v(x,D)A^0(x,D)$ dell'immagine di $A^0(x,D)$ costituiscono l'immagine del trasposto di $\hat{A}^0(x,\xi)$.

«Dato un operatore $A^0(x,D)$ ad elementi in $D_{\mathrm{A}}(K)$ si può sempre ampliare aggiungendo ad esso un numero finito di righe di operatori $w(x,D)$ della forma $w(x,D) = v(x,D)\,A^0(x,D)$, conseguenze di esso, in modo che il nuovo operatore risulti involutivo».

c) Vale il seguente teorema [5]:

TEOREMA. *Dato un operatore $A^0(x,D) : D_{\mathrm{A}}(K)^{p_1} \to D_{\mathrm{A}}(K)^{p_0}$ a coefficienti analitici su K, multigraduato e involutivo, si può costruire una successione finita di operatori multigraduati involutivi $A^j(x,D)$ di modo che le successioni*

$$0 \to D_{\mathrm{A}}(K)^{p_d} \xrightarrow{A^{d-1}(x,D)} \dots \to$$

$$\to D_{\mathrm{A}}(K)^{p_2} \xrightarrow{A^1(x,D)} D_{\mathrm{A}}(K)^{p_1} \xrightarrow{A^0(x,D)} D_{\mathrm{A}}(K)^{p_0}$$

$$0 \to \mathrm{H}(K)^{p_d} \xrightarrow{{}^t\hat{A}^{d-1}(x,\xi)} \dots \to$$

$$\to \mathrm{H}(K)^{p_2} \xrightarrow{{}^t\hat{A}^1(x,\xi)} \mathrm{H}(K)^{p_1} \xrightarrow{{}^t\hat{A}^0(x,\xi)} \mathrm{H}(K)^{p_0}$$

siano esatte con $d \leqslant 2n + 1$.

Supponiamo inoltre K *a interno* $\Omega = \overset{\circ}{K}$ *non vuoto. Allora pel complesso*

$$\mathrm{E}^{p_0}(\Omega) \xrightarrow{A^0(x,D)} \mathrm{E}^{p_1}(\Omega) \xrightarrow{A^1(x,D)} \dots \xrightarrow{A^{d-1}(x,D)} \mathrm{E}^{p_d}(\Omega) \to 0$$

il complesso simbolico risulta un complesso di Hilbert per tutti i punti x_0 *al di fuori di un sottoinsieme analitico proprio di* Ω.

Questo teorema estende al caso dei coefficienti analitici la costruzione data con il complesso di Hilbert per gli operatori a coefficienti costanti. Sotto quali ipotesi si può dare una costruzione analoga per operatori a coefficienti C^∞?

BIBLIOGRAFIA.

[1] ANDREOTTI A., *Complexes of Partial Differential Operators*, Yale University Press, 1975.

[2] ANDREOTTI A., NACINOVICH M., *Complexes of Partial Differential Operators*, Ann. Scuola Norm. Sup. Pisa, v. 3 (1976), pp. 553 - 621.

[3] ANDREOTTI A., NACINOVICH M., *Some Remarks on Formal Poincaré Lemma*, Complex Analysis and Algebraic Geometry, a collection of papers dedicated to K. Kodaira, edited by W. Baily and T. Shioda, Cambridge University Press (1977), pp. 295 - 305.

[4] ANDREOTTI A., NACINOVICH M., *Analytic Convexity*, Ann. Scuola Norm. Sup. Pisa, v. 7 (1980), pp. 287 - 372.

[5] ANDREOTTI A., NACINOVICH M., *On Analytic and C^∞ Poincaré Lemma*, in «Mathematical Analysis and Applications». Advances in Mathematics supplementary Studies, v. 7A (1981), pp. 41 - 93.

[6] FRISCH J., *Points de platitude d'un morphisme d'espaces analytiques*, Inventiones Math., v. 2 (1970), pp. 118 - 138.

[7] LEWY H., *An Example of a Smooth Partial Differential Equation without Solutions*, Ann. Math., v. 66 (1957), pp. 155 - 158.

[8] MORREY C. B., *Multiple Integrals in the Calculus of Variations*, Springer, New York, 1966.

FRANCO FAVA

TRASFORMAZIONI CLASSICHE E FIBRATI DI GETTI

In questa conferenza ci occuperemo di classi di trasformazioni comprendenti quelle introdotte da A. V. Bäcklund un secolo fa (1) e studiate, negli anni che seguirono, da vari matematici: J. Clairin, E. Goursat, L. Bianchi, ecc.

Neglette per alcuni decenni, le originarie trasformazioni di Bäcklund, sono tornate di attualità in questi ultimi anni, per il ruolo di base che esse rivestono nello studio di numerose equazioni differenziali da cui dipende la risoluzione di problemi di matematica applicata (2).

Ricerche recentissime di vari autori (3) stanno dando inoltre il dovuto rilievo all'utilità che la teoria dei fibrati di getti, ottenuta dalla generalizzazione della nozione di fibrato tangente ad una varietà differenziabile, presenta nello studio delle trasformazioni di Bäcklund e di altre ad esse collegate.

Noi cominceremo con alcuni richiami relativi alle trasformazioni di Bäcklund considerate dal punto di vista della geometria differenziale classica servendoci del linguaggio geometrico che fu di L. Bianchi (4) e, si può ben dire, anche di G. Fubini; successivamente esamineremo le trasformazioni in oggetto e alcuni problemi relativi, seguendo l'indirizzo attuale che utilizza, come si è detto, la teoria dei fibrati di getti.

Con la moderna impostazione sarà anche facile riconoscere il ruolo che trasformazioni tratte dalla geometria differenziale proiettiva, ossia da quel capitolo della geometria differenziale che ebbe in G. Fubini il suo fondatore (5), hanno nell'ambito della teoria delle trasformazioni che tratteremo.

---

(1) cfr. [1] e [2].

(2) cfr., a questo riguardo: *Bäcklund transformations*, Lect. Notes in Math., 515 (1976).

(3) cfr., ad es., [15], [16], [6].

(4) cfr. [3], Vol. I, p. II.

(5) cfr. [7].

Trasformazioni di Bäcklund.

Sia $\mathscr{C}$ una congruenza di rette dello spazio ordinario; supponiamo che $\mathscr{C}$ sia pseudo-sferica, ossia (6):

una congruenza per cui risultano costanti la distanza dei fuochi (di una stessa generatrice) e l'angolo dei piani focali.

E' ben noto che le falde focali di una congruenza, sono, nelle condizioni precisate, pseudo-sfere (donde il nome).

Se si considera una qualunque pseudo-sfera S, e si fissa un angolo ω per i piani focali, si trova che esistono ∞^1 congruenze pseudo-sferiche che hanno S come prima falda focale ed i piani focali che formano l'angolo ω assegnato.

Il fatto geometricamente rilevante è che le seconde falde focali delle congruenze così ottenute, sono ancora superficie pseudo-sferiche e la loro curvatura è la stessa di S.

Le seconde falde focali dedotte con il procedimento testè delineato, si dicono, secondo la terminologia del Bianchi: *derivate dalla S per trasformazione di Bäcklund.*

Se si pone:

$$\sigma = \frac{\pi}{2} - \omega$$

il valore di σ determina una *trasformazione* B_σ *di Bäcklund.*

La prova del fatto che le trasformazioni di Bäcklund esistano effettivamente comporta, seguendo i procedimenti classici, la scelta di particolari linee coordinate sulla S quali le linee di curvatura o le asintotiche.

Riferita S alle linee asintotiche ed indicate con u, v le relative coordinate curvilinee, si trova per l'elemento lineare (al quadrato) l'espressione

$$(1) \qquad ds^2 = R^2(du^2 + 2 \cos \omega \, du \, dv + dv^2)$$

con ω soluzione dell'equazione seguente:

$$(2) \qquad \frac{\partial^2 \omega}{\partial u \, \partial v} = \sin \omega;$$

l'equazione (2), che ha un ruolo fondamentale in tutta la teoria delle superficie pseudo-sferiche, diventa basilare per lo studio delle trasformazioni di Bäcklund.

Sempre con procedimenti classici, a partire da S e da ω (o da σ) si perviene

(6) Per le nozioni di geometria differenziale usate in questo §, rinviamo a [3], Vol. I.

alla congruenza che determina B_σ tramite la funzione φ $(= \varphi(u, v))$ (7) che deve risultare soluzione del sistema seguente:

$$(B) \qquad \frac{\partial(\varphi - \vartheta)}{\partial u} = k \sin(\varphi + \vartheta) \qquad (\vartheta = \omega/2)$$
$$\frac{\partial(\varphi + \vartheta)}{\partial v} = k^{-1} \sin(\varphi - \vartheta).$$

Se si procede alla determinazione delle condizioni di integrabilità del sistema (B) si trova che deve valere la

$$(B') \qquad \frac{\partial^2(2\vartheta)}{\partial u\, \partial v} = \sin 2\vartheta$$

ossia la (2).

Ma la (2) è automaticamente verificata per la scelta stessa delle linee coordinate e pertanto il sistema (B) è completamente integrabile.

Al sistema (B) si possono dunque applicare risultati ben noti relativi ai sistemi di equazioni ai differenziali totali completamente integrabili; inoltre vale in questo caso il ben noto teorema di permutabilità del Bianchi.

Per il loro significato le (B) si dicono: *equazioni di una trasformazione B_σ di Bäcklund.*

Una trasformazione di Bäcklund è pertanto data da un legame tra due funzioni (di due variabili) e le loro derivate parziali prime; particolarità essenziali sono:

1. le soluzioni di (B) sono quelle di un'equazione differenziale alle derivate parziali, del secondo ordine (ossia la (B'));

2. l'equazione (B') è invariante per cambiamenti della funzione incognita che verificano le (B).

Le trasformazioni di Bäcklund, considerate da questo punto di vista, si inquadrano in modo naturale nella teoria dei fibrati di getti.

Fibrati di getti di ordine k e nozioni collegate.

Siano M, N due varietà differenziabili aventi dimensioni m, n rispettivamente e classe C^∞; $f : M \to N$ sia un'applicazione pure C^∞.

Con la notazione

---

(7) $\varphi(u, v)$ indica l'angolo che la retta di $\mathscr{C}$ uscente dal punto di S di coordinate (u, v) forma con una delle linee di curvatura.

(3) $$j^k_x(f), \quad x \in M, \quad f \in C^\infty(M,N)$$

conveniamo di rappresentare il *getto di ordine k (o k-getto) di sorgente* $x \in M$ *e bersaglio* $f(x) \in N$.

Ciò premesso, posto

(3′) $$J^k(M,N) = \{j^k_x(f) : x \in M, f \in C^\infty(M,N)\},$$

è ben noto che $J^k(M,N)$ si può dotare della struttura di varietà differenziabile di classe C^∞.

$J^k(M,N)$ *è, per definizione, la varietà fibrato dei getti di ordine k relativi alla coppia* (M,N).

$J^k(M,N)$, per $k = 0$, si identifica con: $M \times N$.

Nella teoria dei fibrati in oggetto sono di uso corrente alcune nozioni che richiameremo brevemente.

Siano α, β le applicazioni così definite:

$$\alpha : J^k(M,N) \to M : \xi = j^k_x(f) \in J^k(M,N) \mapsto x \in M,$$

$$\beta : J^k(M,N) \to N : \xi \mapsto f(x) \in N;$$

α e β si dicono rispettivamente: applicazione *sorgente* e applicazione *bersaglio*.

Supponiamo data $f \in C^\infty(M,N)$; $\forall x \in M$, f individua il k-getto $J^k_x(f)$; la

$$j^k(f) : U \to J^k(M,N), \qquad U : \text{aperto di } M$$

così definita

$$x \in U \mapsto j^k_x(f) \in J^k(M,N)$$

si dice: *k-getto estensione (ad U) della funzione f.*

Supponiamo poi data un'applicazione C^∞

$$\phi : J^h(M,N) \to P$$

con P varietà differenziabile.

L'applicazione

$$\phi^{(s)} : J^{h+s}(M,N) \to J^s(M,P)$$

per la quale risulta commutativo il diagramma:

$$\begin{array}{ccc} J^{h+s}(M,N) & \xrightarrow{\phi^{(s)}} & J^s(M,P) \\ j^{h+s}(f) \uparrow & \nearrow_{j^s(\phi \circ j^h(f))} & \\ M & & \end{array}$$

è detto *prolungamento s-esimo di* ϕ.

Ciò premesso possiamo passare a coordinate locali.

Siano (x^i), $i = 1, 2, \ldots, m$, (y^μ), $\mu = 1, 2, \ldots, n$, coordinate locali dei punti $x \in M, y \in N$; se si suppone

$$y = f(x) \qquad (y^\mu = f^\mu(x^i))$$

il getto

$$\xi = j^k_x(f) \in J^k(M, N)$$

risulta determinato dalle coordinate di x, da quelle di y e dalle derivate parziali degli ordini $1, 2, \ldots, k$ delle coordinate y^μ.

Come coordinate (locali) di $j^k_x(f)$ possiamo così assumere le seguenti:

$$(x^i, y^\mu, \partial_{i_1} y^\mu, \ldots, \partial_{i_1 i_2 \ldots i_k} y^\mu), \qquad i_1 \leqslant i_2 \leqslant \ldots \leqslant i_k \tag{4}$$

avendo posto

$$\partial_{i_1} y^\mu = \frac{\partial y^\mu}{\partial x^{i_1}}, \qquad \partial_{i_1 i_2} y^\mu = \frac{\partial^2 y^\mu}{\partial x^{i_1} \partial x^{i_2}}, \ldots$$

Le (4) si dicono ordinariamente: *coordinate naturali associate alle coordinate locali* (x^i) *di* M (8).

Se nelle (4) le (x^i) si considerano coordinate di un generico punto di U, le (y^μ) e le loro derivate funzioni delle x^i dedotte dalle

$$y^\mu = f^\mu(x) \tag{5}$$

otteniamo dalle (4) stesse, la rappresentazione dell'estensione del k-getto $j^k_x(f)$ ad U.

Passando all'applicazione $\phi : J^h(M, N) \to P$, se z^q $(q = 1, 2, \ldots, p = \dim P)$ sono coordinate valide in un conveniente aperto di P, otteniamo per ϕ la rappresentazione

$$z^q = \phi^q(x^i, y^\mu, \partial_{i_1} y^\mu, \ldots, \partial_{i_1 \ldots i_h} y^\mu); \tag{6}$$

dalle (6), tramite le (5), si deducono poi le equazioni seguenti per $\phi \circ j^h(f)$:

$$z^q = \phi^q(x^i, f^\mu(x), \partial_{i_1} f^\mu(x), \ldots, \partial_{i_1 \ldots i_h} f^\mu(x)). \tag{7}$$

Per quanto concerne $j^s(\phi \circ j^h(f))$ abbiamo le equazioni:

---

(8) Si osservi che nelle (4) abbiamo abbreviato la scrittura per le coordinate locali: avremmo invero dovuto scrivere $x^i \circ \alpha, y^\mu \circ \beta$ in luogo di x^i, y^μ.

$$
(7')\qquad
\begin{aligned}
x^i &= x^i\\
z^q &= \phi^q(x^i, f^\mu(x), \partial_{i_1} f^\mu(x), \ldots, \partial_{i_1 \ldots i_h} f^\mu(x))\\
z^q_{i_1} &= (\underline{\partial}^{h+1}_{i_1}(\overset{*}{\pi}{}^{h+1}_h \phi^q)(x, f^\mu(x), \ldots, \partial_{i_1 \ldots i_{h+1}} f^\mu(x))\\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\\
z^q_{i_1 \ldots i_s} &= (\underline{\partial}^{h+s}_{i_s}(\overset{*}{\pi}{}^{h+s}_{h+s-1} \ldots \underline{\partial}^{h+1}_{i_1}(\overset{*}{\pi}{}^{h+1}_h \phi^q)\,(x, f^\mu(x), \ldots\\
&\qquad , \partial_{i_1 \ldots i_{h+1}} f^\mu(x))
\end{aligned}
$$

dove:

$\overset{*}{\pi}{}^r_{r-1}$ è l'applicazione indotta sui germi delle funzioni $C^\infty(J^{r-1}(M,N))$ dalla proiezione canonica

$$\pi^r_{r-1} : J^r(M,N) \to J^{r-1}(M,N);$$

$\underline{\partial}^r_i$ è l'operatore di derivazione composta, ossia:

$$\underline{\partial}^r_i = \frac{\partial}{x^i} + \frac{\partial}{\partial y^\mu} y^\mu_i + \frac{\partial}{\partial y^\mu_{i_1}} y^\mu_{ii_1} + \ldots + \frac{\partial}{\partial y^\mu_{i_1 \ldots i_{\nu-1}}} y_{ii_1 \ldots i_{\nu-1}}$$

$(y^\mu_i = \partial_i y^\mu$, ecc.).

Per la rappresentazione del prolungamento $\phi^{(s)}$ della ϕ basta considerare le stesse funzioni (7′) con

$$(7'')\qquad y^\mu_{i_1}, y^\mu_{i_1 i_2}, \ldots, y^\mu_{i_1 \ldots i_h}, \ldots, y^\mu_{i_1 \ldots i_{h+1}}$$

in luogo di

$$\partial_{i_1} f^\mu(x), \partial_{i_1 i_2} f^\mu(x), \ldots, \partial_{i_1 \ldots i_{h+1}} f^\mu(x).$$

Sistemi di equazioni differenziali. Utilizziamo l'applicazione considerata in precedenza con $P = \mathbf{R}^p$, ossia la:

$$(8)\qquad \phi : J^h(M,N) \to \mathbf{R}^p.$$

La sottovarietà (chiusa) di J^h (M,N), controimmagine dell'elemento nullo di $\mathbf{R}^p$, è un sistema di p equazioni differenziali (alle derivate parziali) di ordine h.

La rappresentazione in coordinate locali standard del sistema di equazioni ora definito, segue immediatamente dalle (6) per $z^q = 0$ $(q = 1, 2, \ldots, p)$.

Per soluzione del sistema di equazioni differenziali individuato dalle (8), intendiamo una funzione $f \in C^\infty(M,N)$ per cui risulti:

$$(8')\qquad \phi \circ j^h(f) = 0.$$

Moduli di contatto. Sia ϑ una 1-forma su $J^k(M,N)$, si dice che:

ϑ è una forma di contatto se è verificata la condizione:

$$(j^k(f))^* \vartheta = 0, \qquad f \in C^\infty(M, N) \tag{9}$$

ove $(j^k(f))^*$ sta ad indicare l'applicazione duale del differenziale di $j^k(f)$.

L'insieme Ω^k delle forme di contatto su $J^k(M, N)$ ha la struttura (come facilmente si verifica) di modulo (su $C^\infty(J^k(M, N))$).

Ω^k si dice modulo di contatto relativo ad $J^k(M, N)$.

Un diffeomorfismo (locale) F di $J^k(M, N)$ in sé per il quale risulti

$$F^* \Omega^k = \Omega^k \tag{10}$$

si dice trasformazione di contatto.

1. *Osservazione.* Sia $m = 2$, $n = 1$, $k = 1$; poniamo, in coordinate locali standard (x^1, x^2, y, y_1, y_2)

$$\vartheta = \mathrm{d}y - y_1\, \mathrm{d}x^1 - y_2\, \mathrm{d}x^2;$$

se

$$y = f(x)$$

abbiamo

$$j^1(f)^* \vartheta = \mathrm{d}f - (\partial_1 f)\, \mathrm{d}x^1 - (\partial_2 f)\, \mathrm{d}x^2 = 0:$$

quindi ϑ è una forma di contatto.

Analogamente, se $k = 2$, si trovano, oltre ϑ, le seguenti forme di contatto:

$$\vartheta_1 = \mathrm{d}y_1 - y_{11}\, \mathrm{d}x^1 - y_{12}\, \mathrm{d}x^2,$$

$$\vartheta_2 = \mathrm{d}y_2 - y_{21}\, \mathrm{d}x^1 - y_{22}\, \mathrm{d}x^2, \qquad (y_{21} = y_{12}).$$

Nei casi considerati si riconosce che $\Omega^1(\Omega^2)$ è finitamente generato (una base di Ω^2 è data da ϑ, ϑ_1, ϑ_2).

Nel caso di Ω^k, si ottiene, come base standard:

$$\begin{aligned}
&\vartheta^\mu = \mathrm{d}y^\mu - y_i^\mu\, \mathrm{d}x^i,\\
&\vartheta^\mu_{i_1} = \mathrm{d}y^\mu_{i_1} - y^\mu_{i_1 i}\, \mathrm{d}x^i,\\
&\cdots\cdots\cdots\cdots\\
&\vartheta^\mu_{i_1 \dots i_{k-1}} = \mathrm{d}y^\mu_{i_1 \dots i_{k-1}} - y^\mu_{i_1 \dots i_{k-1} i}\, \mathrm{d}x^i.
\end{aligned} \tag{10'}$$

2. *Osservazione.* L'ideale $I(\Omega^k)$ generato da Ω^k, ove si consideri come prodotto il prodotto esterno, non è un ideale differenziale: ciò è evidentemente vincolato al fatto che k è finito.

Applicazioni di Bäcklund: prime generalizzazioni (9).

Facciamo riferimento alle (B) e trascriviamole con notazioni coerenti con quanto trovasi nel § precedente. Otteniamo così le:

$$z_1 = y_1 + k \sin (y + z)$$
(11)
$$z_2 = -y_2 + k^{-1} \sin (y - z)$$

a cui associamo l'equazione

(11') $$2y_{12} = \sin 2y$$

che, come si è visto, è invariante per effetto delle (11).

Le (11) (e (11')) suggeriscono il modo di assegnare una definizione di trasformazione (che diremo del tipo) di Bäcklund e che comprende quella classica come caso particolare.

Trasformazione del tipo di Bäcklund per un'equazione differenziale è una sostituzione che dà le derivate della nuova variabile dipendente espresse mediante la variabile stessa, la vecchia variabile e le sue derivate.

Quanto precede, in termini di fibrati di getti, può venire riformulato nel modo che ora preciseremo, ottenendo subito un maggior grado di generalità.

Siano M, N_1, N_2, tre varietà differenziabili C^∞ e sia

(12) $$\psi : J^1(M, N_1) \times N_2 \to J^1(M, N_2)$$

un'applicazione pure C^∞; facciamo inoltre le ipotesi che siano soddisfatte le condizioni

$$\alpha \circ \psi = \alpha \circ (pr)_1,$$
(13)
$$\beta \circ \psi = (pr)_2.$$

In tale situazione si può dire:

Applicazione del tipo di Bäcklund l'applicazione ψ definita mediante la (12) e verificante le (13).

Introduciamo ora coordinate locali (x^i) per la varietà M, (y^μ) per la N_1 e (z^q) per la N_2; diremo M, N_1, N_2, varietà delle variabili indipendenti x^i, delle variabili dipendenti primitive y^μ e delle variabili dipendenti trasformate; con gli stessi simboli dotati di apici si dovranno intendere coordinate locali valide nelle stesse varietà però collocate «a destra» nella (12).

---

(9) Per il contenuto di questa parte, ci siamo valsi, in particolare, di quanto trovasi in [15] e [16].

Per le (13), le (x^i) e le (z^q) restano inalterate ossia coincidono con le trasformate (x'^i), (z'^q); la ψ si rappresenta dunque nel modo che segue:

$$z'^q_j = \psi^q_j(x^i, y^\mu, y^\mu_i, z^q) \tag{14}$$

con ovvio significato dei nuovi simboli introdotti (cfr., ad es., le (6)).

La nuova definizione, considerata dal punto di vista locale, coincide con la precedente per $\dim M = 2$, $\dim N_1 = \dim N_2 = 1$ e per un'adeguata scelta delle ψ^q_j ci riporta alle (11).

In coordinate locali è facile ottenere le condizioni di integrabilità delle (14). Siano

$$f : M \to N_1, \qquad g : M \to N_2$$

due applicazioni genericamente assegnate: per questo stesso fatto non si possono ritenere soddisfatte le condizioni

$$\partial_j g^q = \psi^q_j(x^i, f^\mu(x), \partial_i f^\mu(x), g^q) \tag{14'}$$

che in forma invariantiva si scrivono

$$j^1(g) = \phi \circ (j^1(f) \times g) \circ \Delta_M. \tag{14''}$$

Affinché le (14') siano verificate deve essere

$$\partial_{i_1} \psi^q_{i_2} - \partial_{i_2} \psi^q_{i_1} = \partial_{[i_1} \psi^q_{i_2]} = 0 \tag{15}$$

e le (15) sono le condizioni di integrabilità del sistema (14).

Se facciamo intervenire la nozione di fibrati di getti, possiamo ricavare, per le condizioni di integrabilità, formulazioni tali da non coinvolgere coordinate locali: tale scopo è conseguito usando ideali o moduli di 1-forme o ancora particolari campi dati sulla varietà fibrato di getti e la scelta avviene a seconda delle questioni da trattare.

Noi indicheremo il procedimento che usa moduli di 1-forme e che, del resto, è quello da cui si deducono gli altri ora ricordati.

Partiamo dalle applicazioni

$$(pr)_1 : J^2(M, N_1) \times N_2 \to J^2(M, N_1)$$

$$\pi^2_1 : J^2(M, N_1) \to J^1(M, N_1)$$

e

$$\tilde{\pi}^2_1 : J^2(M, N_1) \times N_2 \to J^1(M, N_1) \times N_2$$

ossia

$$\tilde{\pi}^2_1 = \pi^2_1 \times id_{N_2}.$$

Se $\Omega^2(M,N_1)$ è il modulo delle forme di contatto su $J^2(M,N_1)$, otteniamo, in modo naturale, il modulo (su $J^2(M,N_1) \times N_2$):

$$\overset{*}{\Omega}{}^2(M,N_1) = (pr)_1^* \, \Omega^2(M,N_1)$$

e così, dalla

$$\psi \circ \tilde{\pi}_1^2 = J^2(M,N_1) \times N_2 \to J^1(M,N_2)$$

il modulo

$$\hat{\Omega}^2(M,N_2) = \tilde{\pi}_1^{2*} \circ \psi^* \, \Omega^1(M,N_2).$$

Dei moduli precedenti (su $J^2(M,N_1) \times N_2$) si può infine considerare la somma

$$\hat{\Omega}^{2,\psi} = \overset{*}{\Omega}{}^2(M,N_1) + \hat{\Omega}^2(M,N_2).$$

Disponendo delle precedenti strutture algebriche, non è difficile dimostrare che (10):

La condizione di integrabilità dell'applicazione di Bäcklund ψ, in termini di 1-forme, è data da

$$(15') \qquad \tilde{\pi}_1^{2*} \circ \psi^* \, d\Omega^1(M,N_2) \subset I(\hat{\Omega}^{2,\psi})$$

ove $I(\hat{\Omega}^{2,\psi})$ indica l'ideale costruito (con l'operazione di prodotto esterno) su $\tilde{\Omega}^{2,\psi}$.

Con il prolungamento s-esimo della ψ, si costruisce facilmente il prolungamento s-esimo delle condizioni di integrabilità ottenendo, in tal modo, la

$$(15'') \qquad \tilde{\pi}_{1+s}^{*2+s} \psi^{*s} \, d\Omega^{2+s}(M,N_2) \subset I(\tilde{\Omega}^{2,\psi^s}).$$

Sulla base delle condizioni di integrabilità, possiamo dare anche una classificazione delle «trasformazioni» di Bäcklund.

Seguendo [13], diremo che l'applicazione del «*tipo di Bäcklund*»

$$(16) \qquad \psi : J^1(M,N_1) \times N_2 \to J^1(M,N_2)$$

è un'*applicazione di Bäcklund* se le sue condizioni di integrabilità sono verificate in un sottoinsieme (non vuoto) $\tilde{\psi}_I$ di $J^2(M,N_1) \times N_2$; diremo invece ψ *applicazione di Bäcklund ordinaria* se il sottoinsieme che dà le condizioni di integrabilità è della forma

$$\tilde{\psi}_I = \psi_I \times N_2$$

con ψ_I (sottovarietà di $J^2(M,N_1)$ che rappresenta un) sistema di equazioni diffe-

---

(10) Si vedano [15], [16].

renziali su $J^2(M, N_1)$.

Se poi, considerato il primo prolungamento di ψ, si ottiene un sistema di equazioni differenziali ψ'_I su $J^2(M, N_2)$, diremo *trasformazione di Bäcklund* indotta dall'applicazione ψ (di Bäcklund) la «*corrispondenza tra* ψ_I *e* ψ'_I *a cui si perviene così procedendo.*

Nel seguito ci adegueremo alla terminologia ora introdotta.

Due esempi classici.

L'originaria trasformazione di Bäcklund (cfr. (11)) è dunque un'applicazione ψ del tipo di Bäcklund (nel senso della def. precedentemente data) per la quale si ha:

$$\dim M = 2, \qquad \dim N_1 = \dim N_2 = 1;$$

essendo valida, in coordinate locali, la rappresentazione

$$(11') \qquad \begin{cases} z'_1 = \psi_1(x^1, x^2, y, y_1, y_2, z) = y_1 + k \sin(y + z) \\ z'_2 = \psi_2(x^1, x^2, y, y_1, y_2, z) = -y_2 + k^{-1} \sin(z - y), \end{cases}$$

va rilevato il particolare che le variabili indipendenti non compaiono esplicitamente.

Passiamo alle condizioni di integrabilità; introduciamo anzitutto dei generatori per i moduli $\Omega^2(M, N_1)$, $\Omega^1(M, N_2)$, ecc.

Otteniamo facilmente

$$(17) \qquad \begin{aligned} \vartheta &= dy - y_1\, dx^1 - y_2\, dx^2, \\ \vartheta_1 &= dy_1 - y_{11}\, dx^1 - y_{12}\, dx^2, \\ \vartheta_2 &= dy_2 - y_{21}\, dx^1 - y_{22}\, dx^2, \end{aligned}$$

come generatori di $\Omega^2(M, N_1)$; per $\Omega^{*2}(M, N_1) = (pr_1)^* \, \Omega^2(M, N_1)$ possiamo considerare formalmente gli stessi ritenendo sottinteso l'operatore $(pr_1)^*$.

Se poi, come generatore di $\Omega^1(M, N_2)$ consideriamo la forma

$$\vartheta^1 = dz - z_1\, dx^1 - z_2\, dx^2,$$

questa dà luogo alla

$$(18) \qquad \psi^* \circ \vartheta^1 = dz - \psi_1\, dx^1 - \psi_2\, dx^2$$

che è un generatore di $\psi^* \, \Omega^1(M, N_2)$; passando poi a $\tilde{\pi}_1^{2*} \circ \psi^* \, \Omega^1(M, N_2)$ (il modulo di forme su $J^2(M, N_1) \times N_2$), potremo usare la forma (18) stessa (per comodità scriveremo ψ_2 anzichè $\tilde{\pi}_1^{2*} \circ \psi^*(\psi_1)$, ecc.) come sua base.

Per quanto riguarda $\tilde{\Omega}^{2,\psi}$ avremo, per base, le forme (17), (18) e per $d\Omega^1(M, N_2)$ semplicemente

$$d\vartheta^1 = (\psi_{21} - \psi_{12})\, dx^1 \wedge dx^2 \tag{19}$$

con

$$\psi_{ji} = \partial_i \psi_j + \frac{\partial \psi_j}{\partial z} z_i =$$

$$= \frac{\partial \psi_j}{\partial x^i} + \frac{\partial \psi_j}{\partial y} y_i + \sum_1^3{}_l \frac{\partial \psi_j}{\partial y_l} y_{li} + \frac{\partial \psi_j}{\partial z} z_i, \qquad (i, j = 1, 2).$$

Per ottenere infine una base di $\tilde{\pi}_1^{2*} \psi^* \, d\Omega^1(M, N_2)$ si può considerare la stessa $d\vartheta^1$ data dalla (19) ove si trascurino forme di

$$I(\tilde{\Omega}^{2,\psi}).$$

Tale circostanza si giustifica in base al fatto che è

$$d(\tilde{\pi}_1^{2*} \circ \psi^*(\psi_i)) = \psi_{ij}\, dx^j, \qquad \text{mod } \tilde{\Omega}^{2,\psi} \tag{19'}$$

e per differenziazione esteriore delle forme interessate tenendo altresì presente quanto si è osservato in merito alla (18) [11].

A causa della (19), la condizione (15′) risulta verificata se e solo se

$$\psi_{21} = \psi_{12}. \tag{20}$$

Effettuati i calcoli si trova poi che la (20) equivale alla

$$2y_{12} - \sin 2y = 0 \tag{20'}$$

ossia alla ben nota condizione di integrabilità del sistema di equazioni (11′).

La (20′) è un'equazione differenziale che determina una sottovarietà di $J^2(M, N_1)$: pertanto la ψ è, secondo la terminologia introdotta, una *applicazione di Bäcklund ordinaria.*

Passiamo al 1° prolungamento ψ^1 della ψ; otteniamo facilmente

$$z'_{11} = \partial_1 \psi_1 = y_{11} + 2k y_1 \cos(y + z) + \frac{1}{2} k^2 \sin 2(y + z)$$

$$z'_{12} = \frac{1}{2}(\partial_1 \psi_2 + \partial_2 \psi_1) = \frac{1}{2} \sin 2z \tag{21}$$

---

(11) Tener presente che una forma che sia combinazione lineare solo delle dx^i, non può dipendere linearmente dalle ϑ, ϑ^1, ecc.

(21) $$z'_{22} = \partial_2 \psi_2 = -y_{22} - 2k^{-1} y_2 \cos(z-y) + \frac{1}{2} k^{-2} \sin(z-y).$$

L'applicazione data dalle (21), è un'applicazione da $J^2(M, N_1) \times N_2$ in $J^2(M, N_2)$.

In particolare, ponendo $z = z'$ (stesse coordinate per la N_2 nei due casi), dalle (21) si ricava l'equazione differenziale

(20″) $$2z'_{12} - \sin 2z' = 0.$$

L'equazione (20″) è dello stesso tipo della (20′): la trasformazione di Bäcklund in esame, in quanto fa passare dalla (20′) alla (20″), che è un'equazione della stessa forma, si dice *autotrasformazione di Bäcklund.*

Evidentemente non tutte le trasformazioni di Bäcklund (ordinarie) sono autotrasformazioni.

Infatti se consideriamo, ad es., la trasformazione di Liouville, studiata recentemente da Lamb e che si può rappresentare come segue

(22) $$\begin{aligned} z'_1 &= y_1 + \beta e^{(z+y)/2} \\ z'_2 &= -y_2 - 2\beta^{-1} e^{(z-y)/2} \end{aligned}$$

con la relativa condizione di integrabilità

(22′) $$y_{12} = 0$$

e determiniamo con il procedimento di prima, il 1° prolungamento dell'applicazione (22), si trova che l'equazione differenziale (o sottovarietà) immagine della (22′) è

(22″) $$z'_{12} + e^{z'} = 0.$$

La trasformazione di Liouville è quindi un'applicazione di Bäcklund ordinaria che non determina un'autotrasformazione (di Bäcklund).

Applicazioni di Bäcklund di tipo più generale.

Le applicazioni di Bäcklund considerate come applicazioni che fanno intervenire varietà di getti, si prestano in modo naturale ed immediato a generalizzazioni di vario tipo.

Una prima generalizzazione si ottiene passando a considerare, in luogo della (12), la seguente applicazione

(23) $$\psi : J^h(M, N_1) \times N_2 \to J^1(M, N_2)$$

congiuntamente con le condizioni (13); la (23), per $h = 1$, ci riporta al caso considerato.

Le condizioni di integrabilità della ψ data dalla (23) si ottengono con passaggi formalmente analoghi a quelli validi per il caso già esaminato; la forma che esse assumono è facilmente prevedibile e cioè:

$$\tilde{\pi}_h^{h+1}\,\psi^*\,\mathrm{d}\Omega^1(M,N_2)\subset I(\tilde{\Omega}^{h+1,\psi}); \tag{24}$$

il significato dei simboli qui usati è da ritenersi ovvio in base a quanto fatto in precedenza.

Da osservare ancora che la classificazione introdotta per il caso $h = 1$, si estende senza alcuna complicazione ai casi in cui è $h > 1$.

Una tale generalizzazione trova motivazioni varie quali quelle offerte dalla meccanica dei continui; numerosi esempi di applicazioni di Bäcklund del tipo in oggetto, si hanno per il valore 2 di h ed interessano, in particolare, la teoria del potenziale: per informazioni adeguate sugli esempi a cui abbiamo inteso riferirci rinviamo al già citato volume della collana «Lectures Notes» (12).

Nel seguito noi ci soffermeremo su un esempio di applicazione di Bäcklund che riteniamo di tipo nuovo e che ricaveremo dalla geometria differenziale proiettiva come fu sviluppata da G. Fubini.

Le trasformazioni *W* di Fubini come applicazioni di Bäcklund.

Ritorniamo dunque alle congruenze di rette ponendoci però dal punto di vista della geometria proiettiva.

Un problema di geometria differenziale proiettiva, è quello posto da Fubini formulando il quesito che riportiamo integralmente (13):

«Quando mai sulle falde focali di una congruenza si corrispondono le linee di Darboux?»

Si sa che una congruenza del tipo richiesto è necessariamente W e che le due falde focali sono superficie iostermo asintotiche.

Ciò premesso, il problema di Fubini si può affrontare partendo da una superficie isotermo asintotica ed effettuando la ricerca delle congruenze W che hanno la data superficie come prima falda focale; in tale situazione si trova poi che ogni congruenza che così si ottiene ammette come seconda falda focale ancora una superficie isotermo asintotica: questa si può dire *trasformata W della data* e il procedimento con cui si ottiene, che ricorda quello considerato all'inizio, *trasformazione di Fubini.*

Le equazioni di una trasformazione di Fubini, scritte usando notazioni intro-

---

(12) cfr. (2) e [15], [16].

(13) cfr. [7], Vol. I, p. 283.

dotte a proposito della teoria dei fibrati di getti, sono date dal seguente sistema:

$$(25)\qquad \begin{aligned} & z'^1_1 = (\partial_1 \vartheta) z^1 - \frac{1}{2}(y^1 + y^2) \\ & z'^1_2 = -\gamma z^2 \\ & z'^2_1 = -\beta z^1 \\ & z'^2_2 = -(\partial_2 \vartheta) z^2 + \frac{1}{2}(y^1 - y^2) && a = -2(\beta\, \partial_2 \vartheta + \partial_2 \beta) \\ & y^1_1 = y^2_1 + a z^1 + b z^2 \\ & y^1_2 = -y^2_1 - b z^1 + c z^2 && b = 2(\partial_{12} \vartheta + \gamma) \\ & y^2_{12} - (\partial_{12} \vartheta + \beta\gamma) y^2 = 0 && c = 2(\gamma\, \partial_1 \vartheta + \partial_1 \gamma) \\ & y^2_{11} - (\partial_1 \vartheta) y^2_1 + \beta y^2_2 - \pi_{11} y^2 = k z^1 \\ & y^2_{22} + \gamma y^2_1 - (\partial_2 \vartheta) y^2_2 - \pi_{22} y^2 = k z^2. \end{aligned}$$

In merito alle precedenti equazioni, che abbiamo ricavato da quelle di Fubini mantenendo per i coefficienti e nel limite del possibile le notazioni originarie [14], è da osservare che il loro sistema è già comprensivo delle condizioni di integrabilità: precisamente la quinta e la sesta sono le condizioni di integrabilità del sistema costituito dalle prime quattro equazioni, la settima (nota come equazione di Moutard», [14]) è la condizione di integrabilità delle due precedenti.

E' poi ovvio che le due ultime equazioni, sotto condizioni poco restrittive, possono essere scritte eliminando la z^1 e la z^2 in modo tale da pervenire a due condizioni, sostitutive delle precedenti, contenenti le sole variabili y^μ, y^μ_i, y^μ_{ij} (oltre alle x^1, x^2).

Le equazioni che abbiamo considerato provano che la trasformazione di Fubini è un'applicazione del tipo di Bäcklund ($\dim M = \dim N_1 = \dim N_2 = 2$)

$$\psi : J^2(M, N_1) \times N_2 \to J^1(M, N_2)$$

di cui interessa la restrizione alla sottovarietà di $J^2(M, N_1) \times N_2$, determinata dalle due ultime equazioni (25).

In questo caso le condizioni di integrabilità non sono espresse da «sottovarietà

---

(14) cfr. [7], Vol. I.

prodotto» di $J^2(M, N_1) \times N_2$: *si tratta perciò di applicazione di Bäcklund non ordinaria.*

Inquadrata la trasformazione di Fubini nella classe delle applicazioni di Bäcklund, si può procedere ad un suo studio approfondito con i procedimenti generali; in tale studio, che qui non affrontiamo, è ovviamente interessata l'equazione $(25)_7$ di Moutard che rappresenta l'analogo della (20') relativa al caso classico di Bäcklund.

Osservazione. Si considerino la quinta e la sesta equazione delle (25) con le z^1, z^2 funzioni note delle variabili x^1, x^2; interpretando la y^2 come prima variabile dipendente y e la y^1 come seconda variabile dipendente z, alle equazioni ricordate si può assegnare la forma

$$(26) \qquad \begin{aligned} z'_1 &= y_1 + f_1(x^1, x^2, y, z) \\ z'_2 &= -y_2 + f_2(x^1, x^2, y, z). \end{aligned}$$

Le (26) definiscono allora un'applicazione del tipo di Bäcklund

$$(27) \qquad \psi : J^1(M, N_1) \times N_2 \to J^1(M, N_2).$$

Come condizioni di integrabilità, in questo caso, si ottiene semplicemente la $(25)_7$ ossia l'equazione di Moutard: la ψ risulta pertanto di tipo ordinario.

In altri termini, le (26) con le f_1, f_2 opportunamente scelte, danno un'applicazione di Bäcklund associata all'equazione di Moutard sopra richiamata.

Problema di Bäcklund e connessioni di Bäcklund. Cenni conclusivi.

Accenneremo anzitutto ad un problema attuale e di notevole interesse, noto come problema di Bäcklund.

In cosa consista tale problema è facile a dirsi se si tiene conto delle nozioni trattate in precedenza; ecco quindi la formulazione:

dato un sistema di equazioni differenziali (o un'equazione differenziale) trovare, se esistono, applicazioni di Bäcklund per le quali le condizioni di integrabilità sono rappresentate dal sistema dato (o dall'equazione data).

Tale problema, come è facile intuire, è di indubbio interesse pratico: purtroppo non se ne conosce la soluzione in generale.

Un metodo che consente di risolvere in vari casi particolari il problema enunciato, è stato escogitato da H. D. Wahlquist ed F. B. Eastbrook pochi anni fa [21]; recenti tentativi sono pure stati fatti per conseguire una migliore sistemazione delle tecniche sinora usate cercando altresì una maggior generalità ricorrendo al formalismo dei fibrati di getti (cfr. [16]).

I procedimenti finora elaborati, se pure lontani in molti casi dall'assetto defini-

tivo, trovano la loro motivazione nei contenuti geometrici dell'equazione da studiare; pertanto, quanto abbiamo detto nell'osservazione conclusiva sulla trasformazione di Fubini, appare legittimo ritenere, ad es., che la geometria delle congruenze W possa avere un non trascurabile ruolo di apertura nello studio dell'equazione di Moutard.

Infine, una teoria che merita di essere segnalata per le indicazioni metodologiche che può fornire, è quella delle connessioni associate ad applicazioni di Bäcklund («connessioni di Bäcklund»): la particolarità che presentano tali connessioni è di ricondurre le condizioni di integrabilità di una data applicazione di Bäcklund all'annullamento di un tensore di curvatura; va però ricordato che l'equivalenza dei fatti suddetti è valida, in generale, solo se si è nel caso in cui i fibrati di getti che intervengono, hanno dimensione infinita.

Quanto è stato passato in rassegna e, in particolare, questi ultimi cenni, provano che la problematica collegata alle applicazioni di Bäcklund si configura molto ampia in quanto costituisce una significativa sintesi di problemi di geometria differenziale, proiettiva differenziale, analisi lineare e non lineare, fisica matematica: tutto ciò mette nella giusta luce l'effettiva portata dell'originaria idea di Bäcklund che, al pari di altre, solo apparentemente è vincolata ad uno specifico problema di geometria.

BIBLIOGRAFIA.

[1] BACKLUND A. V., *Einiges über Kurven und Flachentransformationen*, Lund Universitëts Arsskrift, 10 (1875).
[2] BACKLUND A. V., *Om Ytor med konstant negativ Krökning*, ib, 9 (1883).
[3] BIANCHI L., *Lezioni di Geometria differenziale*, Zanichelli, Bologna (1927).
[4] CLAIRIN G., *Sur les transformations de Bäcklund*, Ann. Scient. Ec. Norm. Sup. 3 s. suppl. 19, S1-563 (1902).
[5] CORONES J. P., TESTA F. G., *Pseudopotentials and their applications*, Lect. Notes in Math., Springer 515 (1976), 184 - 198.
[6] DHOOGHE P. F. J., *Jet bundles and Bäcklund transformations*, in corso di stampa.
[7] FUBINI G., CECH E., *Geometria proiettiva differenziale*, Voll. I, II, Zanichelli, Bologna (1926).
[8] HERMANN R., *Differential geometry and the calculus of variations*, Academic Press (1970).
[9] HERMANN R., *Geometry Physics and systems*, Marcel Dekker Inc. (1973).
[10] HERMANN R., *Vector bundles in mathematical Physics*, Vol. I, Benjamin (1970).
[11] LAMB G. L., *Bäcklund transformations at the turn of the century*, Lect. Notes in Math., Springer 515 (1976).
[12] LIOUVILLE R., *Sur les équations aux dérivées partielles du second ordre*, C.R. 98 (1884), 216, 569, 723.
[13] MIURA R. M., *The Korteweg-de Vries equation: a survey of results*, Siam Review, Vol. 18, n. 3 (1976).
[14] MOUTARD M., *Sur la construction des équations de la forme* $\partial^2 z/\partial x\, \partial y = \lambda(x, y)\, z$, J. de

l'Ecole Polytechnique, 45^e Cahier (1878).

[15] PIRANI F., ROBINSON D., *Sur la definition de transformation de Bäcklund*, C.R., Paris, T. 285, S.A. (1978).

[16] PIRANI F., ROBINSON D., SHADWICK W. F., *Local jet bundle formulation of Bäcklund transformation*, Dep. of Math., Kings College, Strand, London WC2R2LS (1978).

[17] ROGERS C., KINGSTON J. C., *Bäcklund transformation with inversion applied to the Stokes-Beltrami equations*, Tensor, N.S. Vol. 24 (1972).

[18] SCOTT A. C., CHU F. Y. F., MC LANGHLIN D. W., *The soliton, a new concept in applied science*, Proc. L.E.E.E., 61, (1973).

[19] SHADWICK W. F., *The Bäcklund problem for the equation* $\partial^2 z/\partial x^1 \partial x^2 = f(z)$, preprint.

[20] WAHLQUIST H. D., ESTABROOK F. B., *Bäcklund transformation for solution of KdV--equation*, Phys. Rev. Letters, Vol. 31, n. 23 (1973).

[21] WAHLQUIST H. D., ESTABROOK F. B., *Prolongation structures of non linear evolution equations*, J. Math. Phys., Vol. 16, n. 1 (975).

DIONIGI GALLETTO

IL PENSIERO DI EINSTEIN NELL'OPERA DI GUIDO FUBINI E FRANCESCO SEVERI

1. La situazione negli ambienti matematici torinesi, quale si presentava attorno al 1920, era la seguente: da un lato avevamo i professori di Meccanica e di Fisica Matematica, come Carlo Burali-Forti, Tommaso Boggio e Carlo Somigliana, e dall'altro il gruppo dei professori di Geometria e di Analisi, tra i quali primeggiavano Corrado Segre e Guido Fubini. Ebbene va detto che il gruppo dei fisici matematici presentava, nei riguardi delle nuove idee e teorie sviluppate da Einstein durante i quindici anni precedenti, una posizione di tipo critico, per non dire addirittura ostile.

E' significativo al riguardo il testo che Burali-Forti e lo stesso Boggio scrissero in quegli anni, testo che porta per titolo *Critique de la relativité*, e che venne pubblicato a Torino, in francese, nel 1923. In tale testo essi ritengono di individuare tutta una serie di contraddizioni nelle idee sviluppate da Einstein, confortati in questo anche dall'autorità di Carlo Somigliana, in particolare dal contenuto di un suo lavoro, *Sulla trasformazione di Lorentz*, pubblicato sui Rendiconti dei Lincei nel 1922, lavoro in cui l'eminente scienziato crede di rilevare una contraddizione nella teoria della relatività ristretta attraverso la constatazione che le trasformazioni di Lorentz si possono ottenere come classe particolare delle trasformazioni che lasciano invariata l'equazione di propagazione delle onde.

Ben diversa è la posizione di Guido Fubini, mente estremamente aperta ad ogni novità che si presentasse in campo scientifico, sia nell'ambito puramente matematico che nell'ambito fisico. Fubini accolse con entusiasmo l'avvento delle nuove idee di Einstein, sia quelle che portarono nel 1905 alla teoria della relatività ristretta, sia quelle, altrettanto sconvolgenti, che portarono, dal 1905 al 1916, alla formulazione della teoria della relatività generale.

La sua posizione è chiaramente espressa nell'articolo *Sul valore della teoria di Einstein* che egli pubblicò nel 1923 sulla rivista «Scientia». In tale articolo Fubini si dichiara «entusiasta ammiratore della nuova teoria» e dopo aver premesso che la massima parte degli innumerevoli articoli sino a quel momento apparsi sul

pensiero di Einstein è dovuta «ad incompetenti, che forse a mala pena hanno un'idea vaga della relatività della prima maniera» e aver sottolineato che «ciò è vero, quand'anche si prescinda da quella vasta categoria di pseudofilosofi, che, digiuni di coltura scientifica, discorrono di scienze fisiche e matematiche e fanno perfino sintesi audaci di teorie e di fatti a loro quasi completamente sconosciuti» e che pertanto «riescono assai pericolosi per la imprecisione, e talvolta anche per la falsità delle idee che ispirano ai loro lettori», afferma che «la teoria della relatività ha molto di fecondo in sé, molto che nulla potrà mai distruggere, quand'anche la concezione di Einstein si dovesse abbandonare per la scoperta di nuovi fatti sperimentali». E precisa: «Se la teoria di Einstein cadrà, potranno cadere le leggi di interdipendenza da essa stabilite, ma *nessun pensatore sarà più convinto, come di una verità a priori, dell'indipendenza della geometria dalla fisica, e dell'esistenza di un modo assoluto di misurare il tempo*: il dubbio gli rimarrà perennemente», per concludere: «Il porre dei dubbi ove si aveva la certezza assoluta aprioristica, dimostrando che l'assoluta certezza non è completamente giustificata, è un grande progresso!».

2. Queste poche frasi danno una misura dell'apertura mentale che caratterizzava la figura di Fubini. Anzi, il suo interesse per le teorie di Einstein è stato tale che egli, attorno al 1920, tenne addirittura un corso su esse, lasciando una raccolta di dispense litografate dal titolo *Lezioni sulla teoria della relatività*, dove gli argomenti, anche i più recenti e attuali per quell'epoca, vengono trattati con quell'impareggiabile chiarezza e semplicità che assieme costituivano una delle tante doti di Guido Fubini. Questo testo di lezioni contiene un'ampia introduzione dedicata alla geometria non euclidea, seguita da un'esauriente esposizione dei fondamenti del calcolo differenziale assoluto di Ricci-Curbastro e Levi-Civita, ossia l'attuale calcolo tensoriale. A questa esposizione fa seguito un'analisi dettagliata delle equazioni di Maxwell e l'esposizione dei fondamenti della relatività ristretta e dei fondamenti della relatività generale, con un'approfondita analisi dei fenomeni che costituiscono i test classici per quest'ultima teoria: lo spostamento del perielio dei pianeti e la deflessione dei raggi luminosi in un campo gravitazionale.

Va comunque detto che, nonostante la poderosa preparazione che Fubini aveva nell'ambito della geometria differenziale e dell'analisi matematica – premesse indispensabili per affrontare con pieno rigore matematico le teorie di Einstein e per arricchirle di contributi originali – e nonostante l'amplissima apertura che Fubini aveva verso la meccanica e la fisica matematica, apertura documentata da svariati e notevoli lavori originali che spaziano dalla meccanica analitica alla balistica, alla teoria dell'elasticità, all'elettrostatica, non esistono, nella sua vastissima

produzione scientifica, contributi diretti e originali alle teorie di Einstein. Va però aggiunto che nella sua produzione scientifica si trovano alcuni lavori pubblicati agli inizi del secolo, quand'era poco più che ventenne, riguardanti gli spazi che ammettono un gruppo continuo di movimenti, lavori che costituiscono una estensione, ma tutt'altro che facile e semplice, della grande memoria del 1898 di Luigi Bianchi *Sugli spazi a tre dimensioni che ammettono un gruppo continuo di movimenti*, memoria che sino a non molti anni or sono aveva attirato soltanto l'attenzione dei cultori di geometria differenziale, ma che in questi ultimi tempi si è rivelata fondamentale per lo studio dei modelli cosmologici dell'Universo, che costituiscono la più grandiosa applicazione, nel senso letterale del termine, della relatività generale. E non è da escludere che, come è accaduto per la grande memoria di Luigi Bianchi, qualcosa di analogo possa accadere in futuro per queste ricerche ora ricordate e ben poco note di Guido Fubini, e cioè che anch'esse possano trovare applicazione nella teoria della relatività generale.

3. L'anno 1917 rappresenta una data fondamentale non solo nella storia della geometria differenziale, ma dell'intera fisica matematica. In quell'anno, sui Rendiconti del Circolo Matematico di Palermo, appare infatti la celebre memoria di Tullio Levi-Civita *Nozione di parallelismo in una varietà qualunque e conseguentemente specificazione geometrica della curvatura riemanniana*, memoria da cui scaturirono sterminati sviluppi, non soltanto geometrici, ad opera di tutta una schiera di grandi matematici e fisici matematici, quali Hermann Weyl, Èlie Cartan, Luther Eisenhart, Oswald Veblen, Arthur Eddington, ecc.

Al riguardo è il caso di dire che Francesco Severi, con quella rara intuizione e prontezza che lo distinguevano, subito intuì l'importanza di questo lavoro di Levi-Civita, come è confermato dal fatto che, se si va a vedere la grande memoria di Levi-Civita, si trova che essa è seguita subito dopo, nel medesimo volume dove essa è apparsa, da un lavoro di Severi in cui il grande matematico riprende la nozione di parallelismo di Levi-Civita e la arricchisce, tra l'altro, di un ulteriore significato geometrico particolarmente elegante.

A questo punto va aggiunto che, mentre Fubini, insigne cultore di geometria differenziale, rimaneva passivo di fronte all'apparire della memoria di Levi-Civita, e mentre Severi, insigne cultore di geometria algebrica, interveniva fornendo quel significato geometrico a cui si è ora accennato, nell'anno successivo, il 1918, quindi a due anni soltanto di distanza dalla formulazione in forma definitiva da parte di Einstein della teoria della relatività generale, appare in Germania il celebre trattato di Hermann Weyl *Spazio, tempo e materia*, dove Weyl, ricorrendo alla nozione di parallelismo di Levi-Civita, introduce lo spazio che porta il suo nome, e lo pone a fondamento del tentativo, da lui effettuato in detto trattato, di fornire

una generalizzazione della teoria della relatività generale, ossia di formulare una teoria unitaria. Com'è ben noto, questa teoria di Weyl, rigorosa e affascinante dal punto di vista matematico, si rivelò quasi subito inadeguata dal punto di vista fisico. Cadde quindi il tentativo di Weyl, come caddero i vari tentativi già avviati all'inizio degli anni venti da Einstein stesso e da vari altri eminenti fisici matematici. Einstein spese anzi gli ultimi trent'anni della sua vita nella ricerca di una valida teoria unitaria, ma senza successo, nonostante che con la memoria *Teoria generalizzata della gravitazione* del 1948 e in successivi lavori avesse per breve tempo fatto sorgere la speranza di avere raggiunto l'intento: la teoria proposta si rivelò ben presto e ancora una volta inadeguata dal punto di vista fisico.

Per inciso, ancora oggi non si è giunti a una conclusione, anche se certi risultati ottenuti in questi anni, sia pure ancora parziali, diano adito alla speranza che, col bagaglio delle conoscenze di oggi e battendo vie nuove e diverse da quelle seguite di volta in volta da Weyl, da Eddington, da Einstein, ecc., si possa giungere alla scoperta di una teoria unitaria esauriente e definitiva.

4. La posizione di Fubini e di Severi, di fronte al fiorire dei suddetti tentativi, è passiva, se non si tiene conto di qualche breve accenno fatto in alcuni scritti di Severi alla teoria unitaria formulata da Einstein negli ultimi anni della sua vita, in cui appare evidente che detta teoria viene accolta dall'anziano Severi sostanzialmente senza riserve.

Ma passiva non è affatto la loro posizione nei riguardi della teoria della relatività ristretta e della teoria della relatività generale, come si vedrà tra poco per Severi e come già si è visto per Fubini, parlando delle sue *Lezioni sulla teoria della relatività* e soprattutto del suo articolo su «Scientia», in cui il pensiero di Einstein viene entusiasticamente difeso, non solo, come si è detto, dalle ingerenze degli pseudofilosofi ma anche dai suoi seri e a volte strenui oppositori, di cui, come si è ricordato, un consistente e autorevole gruppo era presente in quegli anni anche a Torino.

Oltre a questi oppositori, è il caso di ricordare, tralasciando i numerosi stranieri per rimanere in Italia soltanto, l'illustre fisico sperimentale Quirino Majorana, l'astronomo Michele La Rosa ecc., studiosi che ritenevano l'opera di Einstein, e soprattutto la relatività ristretta, contraria al senso comune o addirittura presentante aspetti contraddittori nei suoi stessi fondamenti.

Di fronte a una tale situazione Severi non poteva certo rimanere estraneo, considerando la vastità dei suoi interessi e il grande fascino che presentavano le teorie di Einstein, in particolare la prima, che, con la negazione di un tempo assoluto, pareva tutto sconvolgere ed essere veramente in contrasto con quanto suggerisce il senso comune.

Quasi contemporaneamente a Fubini, Severi infatti interviene con il lavoro

Riduzione dei principi di relatività ai loro elementi logici, pubblicato sui Rendiconti dei Lincei nel 1924 e con i due articoli *Elementi logici e psicologici dei principi di relatività* e *Esame delle obiezioni d'ordine generale contro la relatività del tempo*, pubblicati su «Scientia» nel 1925. Gli argomenti esposti in questi lavori verranno più volte ripresi nei circa venti lavori che, nella sua immensa produzione scientifica, Francesco Severi ha dedicato ad Einstein e alla sua opera, e trovano la loro sintesi e sistemazione definitiva, mirabile per l'estrema lucidità e chiarezza, nella memoria *Aspetti matematici dei legami tra relatività e senso comune*, pubblicata nel 1955, a settantasei anni, in occasione del cinquantenario della formulazione della teoria della relatività ristretta.

Va in proposito detto che queste ricerche di Severi riguardanti la teoria della relatività sono ben poco note, e anzi praticamente sconosciute negli ambienti fisico-matematici. Data l'importanza che esse rivestono, è pertanto opportuno passarle qui in rassegna anche e soprattutto perché esse, nella stesura definitiva del 1955, certamente costituiscono la più elementare, la più semplice e la più chiara introduzione alla teoria della relatività ristretta che sia stata sino ad oggi scritta, introduzione che, lungi dall'essere contraddetta da quanto suggerisce il senso comune, proprio nel senso comune trova, come Severi ha fatto osservare, il suo naturale fondamento.

5. Salvo qualche sporadica eccezione (1), le esposizioni della teoria della relatività ristretta, in particolare le più note, a partire da quella di Einstein del 1905, iniziano tutte con il cosiddetto principio esteso di relatività (primo principio di relatività), esprimente l'invarianza delle leggi fisiche rispetto ai sistemi di riferimento inerziali, a cui si fa seguire, al più premettendo qualche considerazione essenzialmente di natura fisica, il principio dell'invarianza della velocità della luce rispetto ai riferimenti inerziali (secondo principio di relatività), principio che, nonostante le conferme sperimentali, può apparire a prima vista paradossale, in pieno contrasto con quanto suggerirebbe il senso comune e, secondo certi oppositori del passato, in contrasto anche con lo stesso primo principio di relatività.

Ebbene, Severi, attraverso un'acuta analisi che gli permette di individuare un insieme di postulati suggeriti proprio dal senso comune, perviene alle trasformazioni di Lorentz e al principio della costanza della velocità della luce per via puramente matematica e in modo estremamente elementare, ricorrendo soltanto ai rudimenti della geometria analitica e dell'analisi matematica, in un modo quindi che è accessibile a qualunque lettore che abbia anche soltanto una

(1) Un esempio è dato dalla bella introduzione alla relatività ristretta, contenuta negli *Appunti di meccanica relativistica*, 1973, di C. Cattaneo.

vaga conoscenza di queste discipline. Un'introduzione quindi alla relatività ristretta che, anche per la sua chiarezza e perchè i suddetti postulati costituiscono inoltre la premessa implicita di ogni trattazione razionale della meccanica classica, può trovare posto – e anzi dovrebbe trovare posto – in ogni testo di meccanica razionale o di fisica, anche a livello elementare.

Inoltre detta posizione ha il vantaggio di eliminare gli apparenti o fondati circoli viziosi che l'intervento affrettato del principio della costanza della velocità della luce introduce in tante trattazioni della relatività ristretta, contribuendo a creare lo stato di disagio, particolarmente diffuso nei primi decenni successivi alla formulazione della suddetta teoria, che si prova di fronte a detto principio, fino al punto che taluno, come già si è detto, giunse addirittura ad affermare l'incompatibilità logica tra questo principio e il primo principio di relatività.

6. Facendolo precedere e seguire da un'ampia e acuta digressione sul concetto di tempo e sulla definizione della sua misura, della quale, per ragioni di brevità, non è possibile qui riferire, Severi, in *Aspetti matematici dei legami tra relatività e senso comune*, enuncia il:

Postulato I. *Lo spazio geometrico vuoto e immobile rispetto a un dato osservatore, appare a questo a tre dimensioni ed euclideo.*

Sia A il suddetto osservatore, munito di orologio, e sia B un secondo osservatore, in quiete rispetto ad A, munito di un orologio identico a quello di A. Per chiarire che cosa si intenda dire con ciò, si supponga dapprima che i due orologi siano vicinissimi, al punto che le loro indicazioni possano essere simultaneamente seguite da un medesimo osservatore, ad es. A, il quale può pertanto verificare, per ogni istante del proprio orologio, se l'orologio vicinissimo di B fornisce o meno la stessa indicazione. Il confronto si riduce quindi ogni volta a giudicare se due sensazioni di A sono o meno simultanee, e la loro costante simultaneità definisce appunto l'identità dei due orologi.

Per poter trasferire il giudizio di identità degli orologi da A a B, anche quando i due osservatori sono lontani, sia pure con B in quiete rispetto ad A, Severi introduce i seguenti due postulati, di cui il primo esprime che per i due osservatori esiste un medesimo spazio soddisfacente al Postulato I:

Postulato II (di reciprocità). *Se B è in quiete rispetto ad A, quest'osservatore è in quiete rispetto a B, ossia lo spazio soddisfacente per A al Postulato I è identico a quello che soddisfa allo stesso Postulato per l'osservatore B in quiete con A.*

Postulato III (di somiglianza degli osservatori). *Due eventi che si producano nei punti vicinissimi A e B in quiete reciproca e che diano luogo a sensazioni simultanee o successive, in un certo ordine, per l'osservatore A, danno luogo a sensazioni simultanee o successive (nello stesso ordine temporale) per l'osservatore B.*

Da questi due postulati segue che due orologi identici per A lo sono per B, che un moto uniforme per un osservatore lo è pure per l'altro, ecc., anche nel caso in cui i due osservatori siano lontani. In tal caso si potrà infatti immaginare intercalata fra i due una successione di osservatori tali che due consecutivi siano vicinissimi; si arriva così a definire l'identità degli orologi di osservatori lontani in reciproca quiete e si prolunga in tal modo il tempo locale di A a tutto lo spazio in quiete con A.

Con queste premesse, due eventi che abbiano luogo nei punti A e B saranno *contemporanei* se gli osservatori A e B leggono nei propri orologi, nell'istante dei rispettivi eventi, la stessa ora.

7. Passando ad esaminare il caso in cui i due osservatori A e B non siano più in quiete reciproca, ma di cui uno, B, si muova di moto rettilineo e uniforme rispetto all'altro, A, lungo un regolo rigido r avente l'origine O coincidente con il punto A e graduato mediante l'unità di misura di A, si supponga che in ogni punto di r vi sia un osservatore, in quiete con A, munito di un orologio identico a quello di A, e che l'osservatore B trascini con sé un regolo r', rigido rispetto a lui, scorrente sulla stessa retta del regolo r ed identico ad r prima della partenza. Si supponga inoltre che i due osservatori, prima dell'inizio del moto, quando cioè erano in reciproca quiete, abbiano constatato l'identità delle loro unità di lunghezza e dei loro orologi; si supponga inoltre che B si muova rispetto ad A nel verso positivo e che il moto si sia iniziato quando B era in A, con l'origine O' di r' coincidente con O e con i due orologi che segnavano il medesimo istante $t = t' = 0$.

La rigidità di r' rispetto a B ha il medesimo significato che ha la rigidità di r rispetto ad A, in quanto lo spazio del Postulato I, collegato rigidamente con B, lo accompagna nel moto. *La rigidità di r' rispetto ad A* è invece una condizione derivante dal senso comune. Essa può esprimersi, ad es., dicendo che tutti i punti di r' appaiono ad A in moto uniforme nella direzione del moto di B e con la velocità (costante) di uno di essi, O', ossia di B. Stante la simmetria del fenomeno, i due osservatori A e B non possono non trovarsi nelle stesse reciproche condizioni, ed è quanto appunto viene espresso dal:

Postulato IV. *Il regolo r', rigido per B, appare rigido anche ad A. L'osservatore A si muove rispetto a B con la stessa velocità v (ma in senso opposto) con cui B si muove rispetto ad A.*

8. E' a questo punto che la relatività — che si manifesta nelle misurazioni spaziali e temporali, perché sono le sole misure che risultano relative agli osservatori — si presenta quale alternativa logicamente possibile, che attende dunque soltanto dall'esperienza la sua conferma o refutazione.

Per misurare la velocità di B relativa ad A, basta che l'osservatore A misuri il tempo t – dato dal proprio orologio – necessario perché una determinata graduazione di r' percorra l'unità di lunghezza di A: detta velocità è $v = 1/t$. Ma A può altresì calcolare la velocità di B relativa ad A misurando il tempo t_1 necessario perché due graduazioni successive di B passino dinnanzi ad una graduazione di A. Ne segue che la lunghezza dell'unità di lunghezza mobile con B, quale la misura A, risulta uguale a $vt_1 = t_1/t = \lambda$.

Nessuna conseguenza dei postulati fin qui ammessi può permettere di affermare che sia $\lambda = 1$. Essi sono indifferenti rispetto a tale conclusione. Se è $\lambda = 1$, la lunghezza dell'unità di lunghezza mobile con B non muta per A. Se è $\lambda < 1$ si ha un accorciamento di detta unità di lunghezza, se è $\lambda > 1$ si ha un allungamento.

La contrazione delle lunghezze si presenta a questo punto, come ha messo in evidenza Severi in termini così chiari e semplici, quale possibilità logica assolutamente compatibile con le indicazioni fornite dal senso comune ed espresse dai quattro postulati sino ad ora introdotti. Questa possibilità dunque non è affatto refutabile per imperiose ragioni logiche, ma è soggetta unicamente al controllo e alle indicazioni dell'esperienza, ed è soprattutto indipendente da concetti o leggi non cinematiche e, in particolare, da qualunque ipotesi sulla velocità della luce, che sino ad ora non è affatto intervenuta. Infine, detta possibilità richiede l'intervento del solo tempo dell'osservatore A, e non del confronto del tempo dell'osservatore A con quello dell'osservatore B, mobile rispetto al primo.

La situazione di perfetta reciprocità dei due osservatori, espressa dal fatto che A non ha ragione più di B per dire che è lui che sta fermo e che è B che si muove, implica poi il:

Postulato V. *L'unità di lunghezza di B appare ad A alterata nello stesso rapporto dell'unità di lunghezza di A quale appare a B.*

Ossia l'unità di lunghezza di A appare a B moltiplicata per lo stesso coefficiente λ per cui va moltiplicata l'unità di lunghezza di B per ottenerla quale A la misura. Dal complesso delle premesse segue inoltre, ovviamente, che il regolo r, rigido per A, è tale anche per B.

9. Introdotti sulla retta sulla quale stanno i due regoli r ed r' due sistemi di coordinate x e x', aventi le origini rispettivamente in O e O', si indichino con (x, t) e (x', t') le coordinate spaziali e temporali, rispetto ad A e B, di un evento E che abbia luogo sulla suddetta retta. La coordinata x sarà quindi uguale alla somma delle due distanze $|OO'|$ e $|O'E|$, quali appaiono ad A. Si ha quindi

$$x = vt + \lambda x',$$

ossia

$$x' = \frac{x - vt}{\lambda}. \tag{1}$$

In modo analogo, scambiando le veci dei due osservatori, si ottiene

$$x = \frac{x' + vt'}{\lambda}. \tag{2}$$

Da (1) e (2) segue

$$t' = \frac{1}{\lambda}\left(t + \frac{\lambda^2 - 1}{v}\, x\right), \tag{3}$$

$$t = \frac{1}{\lambda}\left(t' - \frac{\lambda^2 - 1}{v}\, x'\right). \tag{4}$$

Sia ora C un punto mobile lungo r, con velocità costante u rispetto ad A, di coordinate (x, t) rispetto ad A e (x', t') rispetto a B, e sia u' la sua velocità rispetto a B. Da (1) e (3) segue

$$\frac{dx'}{dt} = \frac{u - v}{\lambda}, \qquad \frac{dt'}{dt} = \frac{1}{\lambda}\left(1 + \frac{\lambda^2 - 1}{v}\, u\right), \tag{5}$$

e pertanto risulta

$$\frac{dx'}{dt'} = u' = \frac{u - v}{1 + \dfrac{\lambda^2 - 1}{v}\, u}. \tag{6}$$

La velocità u' è quindi costante, ossia non soltanto il moto di C, ma *ogni moto, uniforme per A, lo è anche per B.*

La prima delle eguaglianze (5), scritta nella forma

$$\frac{d(\lambda x')}{dt} = u - v,$$

esprime che *per la velocità del punto mobile C, rispetto a B, quale la misura l'osservatore A, vale la legge galileiana di composizione*; mentre l'eguaglianza (6) prova che tale legge non vale quando è $\lambda \neq 1$ se la stessa velocità viene misurata da B. *La legge galileiana di composizione diventa così anch'essa relativa all'osservatore.*

10. Per esprimere il carattere transitivo del concetto d'identità di due orologi in reciproco moto rettilineo uniforme, Severi introduce a questo punto il:

Postulato VI. *Se B e C si muovono di moto uniforme rispetto ad A lungo la retta r e ciascuno di essi, prima della partenza, ha constatato l'identità del proprio orologio con quello di A, gli orologi di B e C sono identici tra loro* (e quindi le velocità reciproche di B e C sono uguali, in valore assoluto, poiché già si sa che B e C risultano in reciproco moto uniforme).

I sei postulati sino ad ora introdotti sono validi tanto nella meccanica classica ($\lambda = 1$) quanto nella meccanica relativistica ($\lambda \neq 1$). Essi costituiscono nel loro insieme, nell'ambito cinematico, una precisa delimitazione del *principio galileiano di relatività* (di fronte ai moti rettilinei uniformi), in cui si identifica, nell'ambito della meccanica, il *primo principio di relatività*.

La coesistenza di questi postulati non fornisce nessuna indicazione nei riguardi della grandezza di λ rispetto all'unità. In altri termini, il principio galileiano di relatività non permette di pervenire a nessuna conclusione nei riguardi di λ. E così la cinematica relativistica si insinua, come osserva Severi, quale possibilità logica indipendente, nel complesso delle stesse premesse su cui si fonda la cinematica classica, la quale diventa classica allorché, a questo punto, si aggiunga l'ipotesi, *arbitraria*, che sia $\lambda = 1$, ossia l'ipotesi di un *tempo assoluto*, che regoli gli orologi di tutti gli osservatori. Come già si è osservato al n. 8, è l'esperienza, e soltanto l'esperienza, che può fornire indicazioni sulla grandezza di λ.

11. A questo punto la deduzione della trasformazione di Lorentz in una dimensione diventa quasi ovvia. Per il Postulato VI la velocità di B relativa a C è uguale a $-u'$. Scambiando le veci di B e C rispetto ad A, da (6) segue:

$$-u' = \frac{v - u}{1 + \dfrac{\mu^2 - 1}{u} v}, \tag{7}$$

dove μ è la lunghezza dell'unità di lunghezza di C misurata da A.

Dal confronto di (6) con (7) segue

$$\frac{1 - \lambda^2}{v^2} = \frac{1 - \mu^2}{u^2},$$

ossia, considerati tutti gli osservatori in reciproco moto uniforme lungo r, l'espressione $(1 - \lambda^2)/v^2$ ha lo stesso valore per tutti i suddetti osservatori. Indicato detto valore con $1/c^2$, ossia posto

$$\frac{1-\lambda^2}{v^2} = \frac{1}{c^2},$$

e introdotta la costante c (con $c = \infty$ per $\lambda = 1$, c reale e positiva per $\lambda < 1$, c immaginaria per $\lambda > 1$), le uguaglianze (1), (3), (6) danno luogo alle

$$x' = \frac{x - vt}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}, \qquad t' = \frac{t - \frac{vx}{c^2}}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}, \tag{8}$$

$$u' = \frac{u - v}{1 - \frac{uv}{c^2}}. \tag{9}$$

Ritenendo c reale e positiva ($\lambda < 1$), dall'eguaglianza (9), ponendo $u = c$, si ottiene $u' = c$, qualunque sia v; viceversa, ponendo $u = u'$ si ottiene $|u| = c$, qualunque sia v. Detta eguaglianza prova pertanto che per $\lambda < 1$ *esiste una e una sola velocità misurata da una medesima costante c rispetto a tutti gli osservatori in reciproco moto uniforme su r* (2). Inoltre detta velocità risulta una velocità limite, perchè quando è $v = c$ i denominatori di x' e t' che compaiono nelle eguaglianze (8) si annullano.

Le eguaglianze (8) costituiscono la celebre trasformazione di Lorentz nel caso unidimensionale, nella forma rigorosa ad essa assegnata da Poincaré in sostituzione della forma approssimata ad essa data originariamente da Lorentz.

Dalle eguaglianze (8) si passa infine alla trasformazione di Lorentz in tre dimensioni introducendo il:

Postulato VII. *Un moto traslatorio uniforme nello spazio euclideo collegato con l'osservatore B non altera, rispetto ad A, la lunghezza di un regolo ortogonale ad r*,

postulato che è ammesso implicitamente in tutte le trattazioni della relatività ristretta, inclusa la trattazione originaria.

12. L'ammettere, conformemente a quanto indica l'esperienza, che la velocità (relativa) della luce non si componga con la velocità (relativa) della sorgente, implica, ovviamente, che la velocità di un osservatore non influisce sull'accerta-

(2) Per $\lambda > 1$ non esiste alcuna velocità reale costante per tutti gli osservatori, né alcuna velocità limite reale.

mento del valore della velocità della luce, ossia che tale valore è lo stesso per tutti gli osservatori.

Ma poiché si è dedotto dall'eguaglianza (9) che l'esistenza di una velocità (reale) costante per tutti gli osservatori è associata all'unicità di detta velocità, in conclusione *la costante c risulta uguale alla velocità della luce.*

Resta così provato che il secondo principio di relatività non è per nulla logicamente incompatibile con il primo principio, che anzi è conseguenza logica di questo, non appena alle premesse di senso comune che conducono al primo principio si aggiunga l'ipotesi della contrazione lorentziana ($\lambda < 1$), la quale, essendo indipendente dal primo principio, è certo compatibile con esso.

LUIGI TANZI CATTABIANCHI

I CONTRIBUTI DI GUIDO FUBINI E DI FRANCESCO SEVERI AD ALCUNI PROBLEMI DI BALISTICA ESTERNA

Summary. *Here are illustrated the contributions independently brought by Guido Fubini and Francesco Severi to some problems of exterior ballistics.*

1. Introduzione.

Il Convegno matematico promosso dall'Accademia delle Scienze di Torino e dedicato alla celebrazione del centenario della nascita di Guido Fubini e di Francesco Severi mi ha fornito l'occasione per questo studio, rivolto ad illustrare i contributi, in parte poco noti, indipendentemente apportati dai due insigni matematici ad alcuni problemi di balistica esterna.

I contributi di Fubini sono contenuti in sette pubblicazioni (uscite fra il 1917 e il 1942), quelli di Severi in un'ampia pubblicazione (uscita nel 1919). Per entrambi l'inizio di questi studi (così come di quelli analoghi di V. Volterra, M. Picone, A. Signorini, A. Terracini, e di altri matematici italiani (1)) risale agli anni della prima guerra mondiale, quando si erano improvvisamente posti nuovi problemi di balistica esterna (o si erano rivelati insufficientemente risolti alcuni vecchi problemi), per lo più legati all'impiego, fino ad allora non previsto, di medi e grossi calibri anche in zone di alta montagna (particolarmente sul fronte italiano delle Alpi), reso possibile dai nuovi mezzi meccanici di traino e di trasporto: il problema basilare che allora urgentemente si poneva, e che non poteva essere rigorosamente affrontato se non dal matematico, coi mezzi dell'Analisi funzionale e dell'Analisi numerica, riguardava essenzialmente il caso del «tiro con forte angolo di sito» (ossia il caso di un notevole dislivello fra origine e bersaglio). Le tavole in uso per medi e grossi calibri, che erano state costruite per il cosiddetto «tiro teso» (e che consentivano piccole correzioni nel caso di dislivello fra batteria e bersaglio), si erano dimostrate, ovviamente, del tutto insufficienti come «tavole

(1) Cfr. [29]; in particolare pp. 388 - 389.

di tiro da montagna» (2).

Alla soluzione *razionale* di questo problema, così come di alcuni «problemi secondari» della balistica esterna, non più irrilevanti nel caso di lunghe gittate (effetto della rotazione terrestre, del moto giroscopico dei proietti, delle perturbazioni dovute al vento, ecc.), sono dedicati i primi tre lavori di Fubini e il lavoro complessivo di Severi. I successivi lavori di Fubini comprendono una breve Nota (del 1919) in risposta ad alcune errate critiche mossegli, una Nota riassuntiva dei suoi due primi lavori e comparativa con risultati di altri Autori, pubblicata (nel 1925) sulla rivista specializzata «Mémorial de l'Artillerie Française» e, infine, due Note pubblicate l'una negli Stati Uniti (nel 1941), l'altra in Argentina (nel 1942), negli anni in cui Fubini, costretto all'esilio, era stato chiamato presso l'*Istitute for Advanced Study* di Princeton e, successivamente, alla *New York University* (3). I primi due lavori di balistica di Fubini e quello, ad essi collegato, pubblicato in Francia sono anche riportati nel terzo volume delle sue «Opere scelte», [15], curate dall'Unione Matematica Italiana.

2. I contributi di Guido Fubini.

2.1. I primi tre lavori di balistica di Fubini si trovano pubblicati, i primi due su uno stesso volume dei «Rendiconti dei Lincei» (1917), il terzo sul volume *Scritti Matematici offerti ad Enrico D'Ovidio* (1918). In [8] Fubini dà alcune nuove formule relative al problema della correzione del tiro. Vengono inizialmente considerati i due problemi fondamentali di balisitca esterna: 1°) costruzione della traiettoria di un dato proietto con assegnate condizioni iniziali; 2°) correzione del tiro per un dato spostamento del bersaglio. Tali problemi erano allora risolti in modo sufficientemente approssimato nel caso del «tiro teso» (ossia nel caso in cui l'angolo di proiezione sia sufficientemente piccolo), mentre la soluzione risultava insufficiente nel caso di traiettorie molto curve e di forti dislivelli fra origine e bersaglio.

Nella presentazione della Nota [8] Fubini dichiara:

«Nel §1 darò un metodo, che p. es. potrà servire al pratico per studiare come variano i coefficienti balistici ridotti del Siacci (4) lungo una traiettoria; e troverò la formola di correzione,

(2) Ricordiamo che col titolo di *Tavole di tiro da montagna* compariranno, in quegli anni, alcuni voluminosi fascicoli di raffinate tavole curate da M. Picone (cfr. [21]; [29], pp. 364 - - 372).

(3) A New York Fubini si spegnerà poi nel giugno del 1943. Per notizie sull'Opera di Fubini e di Severi si vedano, ad esempio, le commemorazioni tenute da B. Segre [22], [23]; si veda inoltre quanto è emerso dal Convegno matematico di Torino dell'8 - 10 ottobre 1979.

(4) Qui si farà spesso riferimento al classico trattato di Balistica di F. Siacci [26]; talvolta

che sola si può dedurre dalle formole del Siacci, quando si ammetta per il β principale l'ipotesi del Parodi (5); nel §2 troverò una formola *di correzione* del tiro, valida in tutti i casi senza bisogno di ipotesi sussidiarie; il metodo della *falsa origine*, che vi uso, è suscettibile delle più svariate applicazioni, che io accenno al §3. Nel §4. deduco per nuova via tale formola che si traduce in un'equazione alle derivate parziali (che ritengo muova) per le gittate orizzontali e verticali; e ne deduco nuove e più approssimate formole di correzione».

Fubini considera quindi le equazioni di Siacci in cui figurano i cosiddetti «coefficienti balistici ridotti» (6) e fa alcune considerazioni critiche su una formula di correzione di Parodi (7), nella quale

«si trascurano quantità non ben definite, si compensano errori non ben noti, in modo che non pare soddisfacente ad un teorico. D'altra parte si applicano poi i risultati ottenuti anche al caso di forti dislivelli fra arma e bersaglio, mentre in generale le tavole di tiro sono calcolate per bersagli posti alla stessa altezza dell'arma. Procedimenti tutti, che mi sembra necessario sostituire con altri logicamente più accettabili».

Per mostrare come, nel caso di forti dislivelli, non sia ammissibile l'ipotesi che i coefficienti balistici ridotti restino costanti lungo una stessa traiettoria, Fubini considera l'equazione differenziale dell'odografa

$$g\,\mathrm{d}(v\cos\theta) = \frac{\delta_y i}{C}\, v\,F(v)\,\mathrm{d}\theta \tag{2.1}$$

(dove θ è l'inclinazione, v il modulo della velocità del proietto, δ_y la densità dell'aria alla quota y, C il coefficiente balistico, i il coefficiente di forma, $F(v)$ la funzione resistente di Sciacci) e dimostra (pp. 151 - 153) che

«nei punti ove δ_y/δ_0 è differente sensibilmnete da 1 (punti molto elevati), o dove v dista sensibilmente da u (8), non si vede come, neanche in un piccolo intorno, tali coefficienti possano considerarsi come costanti, *anche se*, come suppone il Parodi, *ci limitiamo a muoverci lungo una stessa traiettoria*. E questi casi, ritenuti come *eccezionali*, diventano la *regola* nei tiri a grandi abitudini con grandi angoli di proiezione».

---

anche ad un successivo lavoro di Siacci, [27], e all'edizione francese [28] del trattato [26]. Verrà anche spesso citato, sia da Fubini che da Severi, il più recente trattato di G. Bianchi [1].

(5) Si tratta del noto «β principale di Sciacci», che verrà spesso citato. Si veda, ad es., [1], pp. 71 - 81 e 104 - 111.

(6) Cfr. [1], p. 78.

(7) Fubini allude qui ad un problema di correzione dei «dati di puntamento» e precisamente a quello relativo al dislivello fra batteria e bersaglio, che ordinariamente si effettuava, allora, per mezzo del cosiddetto «coefficiente di correzione C_2», dato dal Parodi, in [18], nel 1889.

(8) Con $u = v\cos\theta/\cos\varphi$ (essendo φ l'angolo di proiezione) viene indicata la cosiddetta *pseudovelocità*, introdotta da Siacci.

Fubini trova una formula (la (5), p. 153) che «al pratico potrà dare un'indicazione sommaria di come varia un coefficiente balistico lungo un arco di traiettoria». Dall'integrazione dell'equazione dell'odografa col metodo delle approssimazioni successive conclude che:

«*Il metodo di Siacci si può dunque considerare soltanto come la sostituzione del solo primo termine alla serie che viene data dal classico metodo delle approssimazioni successive.* E appare assai dubbioso pertanto che questo sia lecito per tiri molto curvi (9)».

Accenna quindi ad alcuni «ben più rapidi metodi (Vallier, Cranz, ecc. (10)) utili a definire analiticamente le traiettorie»; espone poi «il calcolo migliore per dare, senza inutili e imprecise ipotesi, una formola di correzione del tiro conforme ai metodi classici della balistica di Siacci», facendo una ipotesi (aggiuntiva a quella di Siacci) che ritiene «la più spontanea generalizzazione delle ipotesi usuali». Trova così tre formule (11) che «gli sembrano le uniche, per la correzione del tiro, che si possano logicamente dedurre dalle classiche formole del Siacci», e che «appaiono però profondamente *differenti* dalle formole del Parodi, che pure parte da ipotesi analoghe!». Dopo un accurato esame critico conclude che «tutto questo *permette ad un teorico di elevare gravi dubbi sull'esattezza di formole del tipo precedente*, e consiglia di affrontare *ex-novo* e per altra via il problema della correzione del tiro».

Fubini dà quindi inizio alla parte costruttiva del lavoro (pp. 156 - 161). Il problema che si pone è il seguente: «Se il bersaglio raggiunto con la traiettoria (v_0, φ) era il punto x_0, y_0, si tratti di determinare $\mathrm{d}\varphi$ in guisa che la traiettoria $(v_0, \varphi + \mathrm{d}\varphi)$ raggiunga il bersaglio $x_0 + \mathrm{d}x, y_0 + \mathrm{d}y$». Usando il metodo della *falsa origine* e trascurando gli infinitesimi del secondo ordine, trova per $\mathrm{d}\varphi$ l'espressione

$$\mathrm{d}\varphi = g \frac{\mathrm{d}y - \mathrm{tg}\,\theta \cdot \mathrm{d}x}{v_0^2(\mathrm{tg}\,\varphi - \mathrm{tg}\,\theta) - b\, v_0 \left(g\, \mathrm{tg}\,\varphi + \dfrac{\delta i}{C} F(v) \cdot \dfrac{1}{\cos\varphi} \right)} \tag{2.2}$$

(dove il coefficiente b si deduce dalle tavole di tiro), ed aggiunge:

«*Formole più appropriate potremmo ottenere con lo stesso procedimento, sostituendo*

(9) E aggiunge, in una annotazione a piè di pagina: «Il pratico usa le formole Siacci anche nel caso di φ prossimo a 45°; e assicura che le formole vanno bene, ma si noti che vi compaiono dei coefficienti β, che si determinano appunto in modo da metter d'accordo formole e dati sperimentali. Naturalmente così si aggiusta tutto, *ma soltanto per quel determinato dislivello* fra origine e bersaglio, che si è avuto nelle esperienze (*nullo* nei calcoli del Siacci).

(10) Cfr. [6].

(11) Cfr. [8], formole (8), $(8)^{\mathrm{bis}}$, $(8)^{\mathrm{ter}}$, pp. 155 - 156.

parabole alle linee rette con cui abbiamo rappresentato l'arco iniziale e l'arco finale della traiettoria. Soltanto l'esperienza può dire se sia conveniente, o no, raggiungere questa migliore approssimazione teorica. Formole analoghe *si hanno per la correzione del tiro con variazione di carica* (12). In ogni modo io propongo per la correzione dei tiri curvi o con forti dislivelli di abbandonare i metodi usuali, ma di usare o la (2.2), o quella formola analoga che, come dicemmo, si può ottenere con analogo procedimento».

Accenna poi ad altre applicazioni del metodo della *falsa origine* che «si presta anche ai calcoli di altro genere, che non siano delle piccole correzioni»: ad esempio, con esso, da una tavola di tiro ad angolo fisso (cioè in cui si mantiene costante φ) si può dedurre una tavola di tiro a carica fissa (cioè in cui si mantiene costante v_0), e viceversa; oppure, da una tavola di tiro costruita per bersagli sull'orizzonte del pezzo si può passare ad una tavola di tiro per bersagli posti al disopra dell'orizzonte del pezzo, scegliendo per ogni traiettoria come *falsa origine* quel punto che è alla stessa altezza del bersaglio. E qui precisa: «Naturalmente in queste correzioni non piccolissime si dovrà tener conto della differente densità dell'aria all'origine vera e alla falsa origine (13)».

Nella parte finale del lavoro, Fubini perviene a due nuove equazioni alle derivate parziali, lineari, del primo ordine (14), che legano direttamente ai dati iniziali di tiro (ossia ai valori di v_0 e di φ) la gittata e l'angolo di arrivo, rispettivamente, su un piano orizzontale e su un piano verticale qualsiasi. Da esse deduce altre formule di correzione che tengono conto anche degli infinitesimi del secondo ordine; giudica che «non valga la pena di dare formole di correzione che tengano conto degli infinitesimi di ordine superiore al secondo».

2.2. In [9] Fubini si occupa invece del problema di calcolare la traiettoria di un dato proietto. Nella prima parte dà alcune generalizzazioni del metodo di Siacci, utili per lo studio del tiro con forte dislivello fra origine e bersaglio. Ritiene che, per generalizzare tale metodo, «si debba evitare l'uso di funzioni in due variabili», ossia di tavole a doppia entrata, e preferisce invece «rendere, per così dire, più elastico il metodo Siacci, ricordando che una formula teorica tanto più completamente può rappresentare un fenomeno fisico, quanto maggiore è il numero delle costanti arbitrarie che essa contiene». Osserva che il β principale, unico parametro che compare nelle formule di Siacci, basta per il tiro contro un bersaglio posto sull'orizzonte del pezzo, perché in tale studio vi è una sola incognita,

---

(12) Ossia al variare di v_0.

(13) Vedremo che questo argomento si collegherà con problemi affrontati da F. Severi in [25].

(14) Cfr. [8], (10) e (10)$^{\text{bis}}$.

la *gittata*; mentre invece il β non basta più per bersagli posti a forti dislivelli dall'origine, che dipendono da due coordinate, o per altri problemi più complicati.

Dopo aver ricordato di avere già provato, in [8], che il metodo di Siacci si può, con opportuno cambiamento di funzione incognita, considerare come la sostituzione del solo primo termine allo sviluppo in serie che si ottiene dal classico metodo delle approssimazioni successive, dichiara però che, invece di cercare di ottenere risultati migliori col calcolo del secondo termine di tale sviluppo, procederà per altra via, a causa delle difficoltà di calcolo che sorgono nel valutare la migliore approssimazione raggiunta. Perviene così ad una interessante e nuova interpretazione del metodo di Siacci e del «valore intermedio» β (di una certa funzione, lungo curve integrali): il metodo di Siacci, così concepito, e che potremmo chiamare *metodo di Siacci-Fubini*, si presta alle più svariate generalizzazioni. Conclude Fubini: «*Si e così trasformato nel modo più semplice, anche per il calcolo numerico, il metodo Siacci in un metodo di successive approssimazioni*». Osserva quindi che, quando era pervenuto a questi risultati, ignorava che essi fossero già stati trattati in un caso particolare «dall'ing. col. Bianchi in un suo pregevole lavoro», e cita la Nota di G. Bianchi [2] (pubblicata nel 1914).

Nella seconda parte si occupa invece del calcolo di una traiettoria per punti, problema connesso con quello del calcolo della densità media dell'aria per un arco di traiettoria, per il quale indica alcuni procedimenti (metodo delle funzioni $\xi(\theta)$, allora usate in balistica e per le quali esistevano tavole numeriche; uso della formula di Taylor secondo le potenze di tg θ; metodo di una «curva media fra due parabole»; ecc.). Ricorda qui che «altre parabole di questo tipo sono state date dal prof. Picone in una sua notevole Memoria in corso di stampa nella Rivista di Artiglieria e Genio (15); altre traiettorie del tipo voluto sono date nella Nota citata dell'ing. Bianchi».

2.3. In [10] Fubini affronta alcune questioni relative ai cosiddetti «problemi secondari della balistica esterna» (studio dell'effetto sul moto dei proietti dovuto al vento, alla rotazione terrestre, ecc.). Dopo aver ricordato che le formule usuali che danno la *derivazione* (ossia la deviazione del proietto rispetto al piano verticale), e che misurano l'effetto prodotto dal vento sui proietti oblunghi, sono talvolta insufficienti, e aver accennato alla notevole discordanza fra i dati teorici, espressi dalle formule, e i risultati sperimentali, così continua:

«Ciò mi induce a pubblicare in questa Nota qualche lieve variante alle solite ipotesi fondamentali, che permette di dare altra forma allo studio teorico dei problemi citati. E' probabile che neanche il presente lavoro esaurisca la questione; forse risultati migliori si otterranno

(15) Cfr. [20].

assumendo come equazioni differenziali *qualche equazione di tipo intermedio tra le equazioni classiche, e quelle che qui saranno svolte*. Mi mancano purtroppo risultati sperimentali, che soli potrebbero essere di guida sicura; perciò, lungi dal pensiero di esporre un metodo definitivo, espongo soltanto un'idea da cui potrà sorgere forse una teoria soddisfacente (...). Per questo, (...) mi accontenterò di sviluppare soltanto in un caso tutti i calcoli, che del resto non presentano difficoltà. Per un proietto, che si muova nel piano di tiro, la grandezza della resistenza dell'aria è, come è noto, del tipo $c\,F(v)$, dove c è una costante, $F(v)$ è la nota funzione del Siacci. Si suole assumere questa formola come ipotesi fondamentale anche nello studio dei problemi secondarii del tiro (...), in particolare anche quando si vuol tener conto degli spostamenti in senso normale al piano di tiro. E che ciò possa talvolta contraddire ai risultati sperimentali, specialmente quando il proietto si muove con piccola velocità, si può forse persino rendere intuitivo *a priori*, appena si pensi al caso limite di un proietto, il cui moto avvenga in direzione normale al piano di tiro. In questo caso il proietto non presenta più la punta al mezzo resistente, ma presenta la superficie laterale, la quale naturalmente incontra nell'aria una resistenza ben maggiore di quella che il proietto incontrerebbe qualora si muovesse di punta. Il prof. capit. Picone (16), a cui comunicavo i miei pensieri al riguardo, mi diceva che anzi qualcosa di analogo deve avvenire anche per il moto di un proietto nel piano di tiro, quando l'angolo di proiezione sia molto forte; cosicché il coefficiente c dovrebbe essere ingrandito quando si tiri con angoli di oltre 40°, se si vuole l'accordo delle traiettorie calcolate con le traiettorie sperimentali».

Fubini fa poi l'ipotesi (fra varie possibili, alle quali accenna) «che la resistenza dell'aria sia la somma di quella a cui si riferisce l'ipotesi classica, e di una resistenza normale al piano di tiro, che dipenda esclusivamente dalla componente della velocità del proietto secondo questa normale». E aggiunge: «Non avendo a mia disposizione alcun risultato sperimentale, mi limiterò a scrivere le equazioni, separando completamente i movimenti delle due proiezioni citate». Ritiene però che, per calcolare una tale resistenza, «piuttosto che alle leggi della balistica (...) si debba ricorrere alle leggi che più propriamente appartengono quasi al campo della aerodinamica». Affronta quindi, in un caso particolare, lo studio dell'effetto provocato dal vento sul proietto (17): considera tre equazioni differenziali che danno le espressioni di $\ddot{x}$, $\ddot{y}$, $\ddot{z}$ (nell'ipotesi che la direzione positiva dell'asse, orizzontale, z sia dalla banda verso cui va il vento); trova per lo spostamento z la formula

---

(16) Anche qui Fubini cita M. Picone, che allora, come ufficiale di artiglieria, si occupava, come abbiamo accennato in (2), dello studio e del calcolo di nuove *Tavole di tiro da montagna* per medi e grossi calibri (cfr. [20], [21], [29]), per le quali venivano considerati anche forti angoli di proiezione. Osserviamo che questo lavoro [10] di Fubini verrà a sua volta citato da Picone nella successiva Memoria [22], in cui viene, a fondo, trattato il calcolo della perturbazione dovuta al vento (cfr. anche [29], p. 374).

(17) E precisamente nel caso in cui la velocità del vento sia supposta orizzontale. Per uno studio delle perturbazioni provocate dal vento sotto ipotesi più generali si veda il già citato lavoro [22] di M. Picone.

$$z = \frac{k}{2} (w \text{ sen } \alpha)^2 t^2 \tag{2.3}$$

(dove $k > 0$ è una costante dipendente dal proietto, w è il modulo del vettore vento e α è l'angolo che tale vettore forma con l'asse x), e osserva: «All'esperienza il decidere se, specialmente per i proietti dotati di scarsa velocità iniziale, questa formola sia applicabile. *La verosimiglianza del risultato ottenuto appare manifesta a chi confronti con le note formole pratiche del prof. Hélie per la derivazione*». Accenna infine all'effetto sul moto di un proietto dovuto alla rotazione terrestre, e al caso della derivazione dei proietti oblunghi.

Dall'esame di questi tre primi lavori di Fubini viene spontaneo osservare che essi danno un contributo sufficientemente completo alla risoluzione (sia dal punto di vista dell'Analisi funzionale, sia, in alcuni casi precisati dall'Autore, dal punto di vista dell'Analisi numerica) dei problemi di balistica esterna che si erano improvvisamente presentati in quegli anni.

In relazione coi due primi lavori [8], [9] (18) è poi la breve Nota Lincea [11], che fa seguito ad alcune infondate critiche contenute in una pubblicazione, [3], di E. Cavalli, la quale, dice Fubini, «contiene anche una filza di attacchi non alle mie formule, ma al loro autore. Non me ne occupo sia perché non interessano per niente me, e ancor meno il lettore, sia perché affatto estranei alla invocata serenità della discussione scientifica»; e aggiunge: «Non inizio però una polemica che, per parte mia, ritengo chiusa con questa Nota. Io mantengo integralmente tutte le considerazioni dei miei lavori citati». Risponde poi, concisamente, punto per punto, alle critiche mossegli.

Nel citare, in [11], un lavoro che contiene un caso particolare di un risultato da lui trovato in [9] (e che si comprende essere la Nota [2] di G. Bianchi, già qui ricordata), Fubini accenna alla «lettura fatta, per debito di studioso, di tutte le Memorie di balistica che potei procurarmi»: mi sembra utile riportare questa sua dichiarazione, che mette chiaramente in luce il motivo che lo aveva spinto a questi e ai successivi studi di balistica, da lui affrontati *per debito di studioso*. Nel mostrare poi l'infondatezza dei dubbi sollevati su due dimostrazioni da lui date per una formula sulla correzione del tiro, Fubini precisa che tali dimostrazioni furono «seguite più tardi da una terza dovuta al prof. Picone»: ricordiamo, in proposito, che tale dimostrazione è contenuta nel primo lavoro di balistica, [19], di M. Picone, pubblicato all'inizio del 1917 e nel quale Picone ricordava pure quei risultati di Fubini (19). Osserviamo infine che Fubini cita, in [11], una segnalazione a

---

(18) Ricordiamo che questi due lavori di Fubini vengono citati nella nota monografia [7], (p. 50).

(19) Si veda anche, su ciò, quanto è riportato in [29], pp. 361 - 363.

lui fatta da A. Terracini circa la necessità di tener conto, in certi casi, di una correzione dovuta alle variazioni di densità dell'aria (20).

2.4. I primi lavori di balistica di Fubini avevano trovato un lusinghiero riconoscimento in Francia, dove Fubini pubblica, nel 1925, il lavoro [12], che presenta con queste parole: «Je résume ici mes anciennes recherches: l'une sur le problème de la correction du tire, l'autre sur l'applicazion des formules de M. Siacci dans le cas le plus général possible». Inizia accennando ad alcune conseguenze differenziali delle formule di Siacci e ad alcuni metodi elementari per la correzione del tiro (argomenti già qui ricordati). Ricorda poi che l'integrazione di certe equazioni differenziali «dont M. Picone s'est occupé en Italie, donne la résolution mathématique du probleme de la correction du tir»: Fubini allude anche qui al primo lavoro di balistica di Picone, già ricordato. Cita poi ancora lo stesso lavoro trattando di un'altra sua formula per la correzione del tiro, nel caso in cui si debba tener conto dell'effetto della variazione della densità dell'aria (argomento, questo, che vedremo essere collegato col lavoro [25], indipendentemente sviluppato da F. Severi).

Considera poi le due equazioni a derivate parziali, da lui ottenute in [8] (già qui ricordate), per le gittate orizzontali e verticali; illustra infine la sua generalizzazione del metodo di Siacci, originata dalla necessità di affrontare razionalmente il problema principale della balistica esterna nel caso di una notevole differenza di quota fra origine e bersaglio e, aggiunge, «à laquelle M. Siacci ne peut pas avoir pensé» (21).

Fanno seguito due interessanti osservazioni, contenute in una «Note de la Rédaction». Nella prima viene rilevato che la formula di Fubini che lega le variazioni dell'angolo di proiezione, della gittata e della quota, si riduce, in un caso particolare, ad una formula data da Siacci e contenuta a p. 107 dell'edizione francese [28] del suo noto trattato; viene quindi fatto un confronto fra tre formule relative alla variazione della gittata (due ottenute, a distanza di tempo l'una dall'altra, da Siacci, la terza allora in uso presso l'artiglieria francese). Nella seconda viene segnalato che in [8] Fubini aveva ritrovato una formula per la «correzione di alzo» già dimostrata in modo diverso dal Dupuis (e contenuta nel *Cours de Balistique* del Sugot, t. III (1916), p. 36, e successivamente completata dal prof. Haag, mobilitato presso la Commissione di balistica di Gâvre negli anni 1915

---

(20) Sui contributi dati alla balistica da A. Terracini si veda [30], pp. 84 - 88; si veda anche [29], pp. 359, 364, 366.

(21) Ci sembra utile ricordare che l'opera fondamentale di F. Siacci (1839 - 1907) si sviluppò essenzialmente negli ultimi tre decenni dell'800 (la sua ultima pubblicazione di balistica è del 1901).

e 1916), certamente non ancora nota in Italia quando Fubini la riottenne (22).

2.5. Molti anni dopo (1941, 1942), nel periodo del suo forzato esilio, Fubini pubblica le due Note [13], [14]. Nella prima, pubblicata su *The American Mathematical Monthly*, dà una elegante generalizzazione del classico «teorema dell'angolo di caduta» (che afferma essere l'angolo di caduta maggiore dell'angolo di proiezione): la formula alla quale perviene è la seguente

$$\text{(2.4)} \qquad \operatorname{tg} \varphi - \operatorname{tg} \epsilon < \operatorname{tg} \epsilon - \operatorname{tg} \theta_P,$$

dove φ è l'angolo di proiezione, ϵ è l'angolo di sito, P è il punto d'arrivo (bersaglio), θ_P è l'angolo di inclinazione in P. Dalla (2.4), se P coincide col punto di caduta, risulta $\epsilon = 0$, $-\theta_P = \omega$ (essendo ω l'angolo di caduta) e si ottiene il teorema classico ($\omega > \varphi$). Dal teorema espresso dalla (2.4) Fubini ottiene poi una nuova generalizzazione nel caso in cui il punto P stia sull'arco ascendente della traiettoria, e precisamente la relazione

$$\text{(2.5)} \qquad \varphi - \epsilon < \epsilon - \theta_P \qquad (\varphi > \epsilon > \theta_P > 0).$$

Nella seconda, pubblicata su *Mathematicae Notae* (rivista fondata l'anno precedente, presso l'Università di Rosario, da Beppo Levi) espone una «osservazione elementare sulle equazioni della balistica esterna». Si rifà ad una classica Memoria di Fowler, Gallop, Lock e Richmond (Philos. Trans. R. Soc. London, vol. 221, 1921), nella quale, a partire dalle equazioni generali della dinamica di un corpo libero in forma vettoriale, vengono considerate, pure in forma vettoriale, le equazioni della balistica esterna; basandosi poi su una nota monografia di F. R. Moulton (23), nella quale l'Autore studia il caso, particolarmente importante per le applicazioni, in cui la traiettoria del baricentro del proietto sia piana o si possa almeno considerare tale in prima approssimazione, e osservato che il metodo di Moulton, ivi usato, è assai ingegnoso, ma esige alcuni calcoli non immediati e alcune delicate considerazioni sui segni, Fubini fa alcune semplici osservazioni in conseguenza delle quali le equazioni del moto di un proietto intorno al suo baricentro, valide nel caso più generale, si possono dedurre immediatamente da quelle valide in prima approssimazione.

---

(22) Osserviamo che, in [12], è pure da attribuirsi a «nota della redazione» la lunga annotazione (5), nella quale si avverte che nel tomo II del trattato [5] di P. Charbonnier (allora in corso di stampa e che uscirà, poi, nel 1927) si troveranno indicati alcuni metodi (e se ne dà cenno) che si avvicinano a quelli indicati da Fubini come generalizzazioni del metodo di Siacci.

(23) Cfr. [16]. Ricordiamo che di tale ormai classica monografia di balistica razionale (pubblicata a Chicago nel 1926) è stata curata una ristampa, [17], (pubblicata a New York nel 1962).

A conclusione, ricordiamo che B. Segre, in [23] (24), accennando a questo ultimo lavoro di balistica, dice che Fubini fece anche «varie interessanti osservazioni di balistica esterna, in occasione di un corso di balistica – tenuto allora – nel quale diede altresì una teoria completa del «boomerang», rimasta però inedita» (25).

3. I contributi di Francesco Severi.

3.1. Severi espone in [25] i contributi da lui apportati ad alcuni problemi di balistica esterna negli anni della prima guerra mondiale, alla quale aveva partecipato come ufficiale di artiglieria. Precisa che tali pagine gli erano state «suggerite da bisogni pratici e contengon perciò varie osservazioni desunte dall'esperienza». Ciò mostra già le diverse posizioni, pur nell'affrontare problemi analoghi, di Severi e di Fubini: questi infatti dichiara più volte di mancare di risultati sperimentali e dà dei problemi trattazioni teoriche possibilmente assai generali, per le quali propone poi un controllo sperimentale nei casi particolari aderenti a dati di fatto reali; mentre il Severi trae essenzialmente ispirazione dai dati sperimentali di cui dispone (26).

Riportiamo dalla lunga parte introduttiva di [25] (pp. 297 - 304):

«Soltanto da poco, nella pratica di tiro di artiglieria, si tiene conto da noi delle correzioni da apportarsi a causa delle variazioni di densità dell'aria. La maggior parte delle nostre tavole di tiro indicano la correzione per le variazioni di altitudine della batteria, considerando per ogni altitudine una densità media. (. . .) Le variazioni, tutt'altro che trascurabili, che si riscontrano in pratica nella gittata, al mutare delle condizioni atmosferiche (p. es. dal giorno alla notte), hanno indotto (. . .) ad adottare correzioni più precise di quelle che derivan dalla considerazione dell'altitudine.

Nel marzo del 1918 proposi al Comando dell'Armata, alla quale allora appartenevo, un'istruzione corredata dalla relativa tabella numerica, la quale permetteva di applicare la correzione relativa al cambiamento della densità dell'aria (. . .), senza che perciò fosse necessaria alcuna modificazione alle tavole di tiro e al loro impiego. Dal punto di vista teorico la questione non

---

(24) Ricordiamo che la *Commemorazione di Guido Fubini* [23] è anche riportata nel primo volume delle *Opere scelte* [15] (cfr., in particolare, p. 26).

(25) Purtroppo su tali contributi inediti di Fubini non siamo riusciti ad avere più precise notizie.

(26) Ricordiamo che, in quegli anni, Severi aveva anche organizzato, presso l'Armata alla quale apparteneva, il servizio fonotelemetrico per l'artiglieria: si veda su ciò quanto dice B. Segre in [24], p. 546 (segnaliamo che in [24] il titolo del lavoro [25] di Severi è erroneamente riportato nella forma: «Sulle correzioni al tiro d'artiglieria dipendenti dalle variazioni *di temperatura e di pressione*», anziché «*di densità dell'aria*»; tale titolo errato è stato riportato in [29], p. 389).

offriva alcuna difficoltà e doveva anzi ritenersi risoluta (27); occorreva invece fornire una soluzione pratica, che non esigesse di introdurre nuovi elementi nelle tavole di tiro e che non cambiasse le abitudini dei Comandanti di batteria, taluni dei quali, per le necessità dell'ampio reclutamento, non avevano soverchia familiarità colle matematiche. La istruzione e la tabella da me proposte furono adottate e funzionarono dall'aprile scorso, con ottimo rendimento, nell'Armata cui appartenevo.

Poiché dei tre elementi che entrano in modo essenziale a determinare la densità dell'aria (temperatura, pressione, umidità), il terzo è, come si prova, assolutamente trascurabile ai nostri fini, invece di considerare le variazioni di densità, mi limitai a considerar la variazione di temperatura e di pressione. Ottenni così una quota fittizia, chiamata *quota balistica* (funzione della temperatura e della pressione), la quale, nell'impiego delle usuali tavole di tiro, *sostituisce* la quota reale della batteria.

Ad ogni altitudine (reale) è associata una densità media (corrispondente alla sua volta ad una temperatura τ e ad una pressione B medie). Orbene, la quota balistica determinata da τ, B, coincide colla quota reale, rispetto alla quale τ, B rappresentan la temperatura e la pressione medie. Se p. es. in un dato luogo e in un dato istante si misura la temperatura di 15 °C e la pressione di 750 mm, cioè la temperatura e la pressione che si consideran come medie all'altitudine di m 130 sul livello del mare, la quota balistica di quel luogo deve ritenersi uguale a 130 metri, qualunque ne sia la quota reale. Da formule ben note di balistica si ricava facilmente (n. 1) il valore della quota balistica A, espressa in ettometri, in funzione della temperatura centigrada τ e della pressione B, in mm di mercurio:

$$A = 0.408\tau - 0.157B + 112.63. \tag{1}$$

Dovendosi sparare contro un bersaglio che si trovi sull'orizzonte del pezzo ad una quota reale Q (in ettometri), le istruzioni vigenti nel nostro Esercito prescrivono di apportare alla distanza orizzontale X pezzo-bersaglio, espressa in metri, la correzione $C_1(Q-1)$, ove C_1 è un coefficiente numerico che si legge nelle tavole di tiro in corrispondenza alla distanza X. L'elevazione da darsi al pezzo deve prendersi in corrispondenza della distanza corretta:

$$X_1 = X - C_1(Q-1) \text{ (28)}.$$

La correzione più esatta, fornita dalla quota balistica, non altera in nulla l'applicazione formale di questa regola. Invece di considerare la quota reale Q, si misura in batteria la temperatura τ e la pressione B nel momento del tiro. Dalla tabella a doppia entrata costruita mediante la (1), si ricava la quota balistica A e si dà al pezzo l'elevazione corrispondente alla distanza corretta:

$$X_1 = X - C_1(A-1). \tag{2}$$

Questa regola è applicabile ad ogni bocca da fuoco, giacché le nostre tavole di tiro danno generalmente il valore del coefficiente C_1 in corrispondenza ad ogni X. (...)

Le ipotesi su cui poggia la deduzione della formula

---

(27) E qui Severi cita il trattato di G. Bianchi [1], p. 136.

(28) E Severi aggiunge, in una annotazione a piè di pagina: «Se il bersaglio non trovasi sull'orizzonte del pezzo, occorre apportare alla distanza corretta X_1 un'ulteriore correzione, funzione del dislivello pezzo-bersaglio. Ved. a questo proposito il n. 6». Ivi, come vedremo al n. 3.3, Severi accennerà al coefficiente di correzione C_2 di Parodi e agli errori ai quali conduceva l'uso di tale coefficiente.

(3) $$\Delta X = C_1(A-1),$$

che fornisce la variazione della gittata X in corrispondenza ad una variazione della quota balistica da 1 ad A, son le seguenti:

a) Che i valori medi della funzione β che si considera nel metodo Siacci, siano eguali tra di loro (29).

b) Che le variazioni della quota siano di tale ordine di grandezza da poter, senza errore sensibile, sostituire gl'incrementi finiti della quota balistica e della gittata, ai differenziali primi di tale quantità».

Severi, dopo avere osservato che, delle due ipotesi, la a) tende ad escludere dal campo di applicabilità della (3) le traiettorie troppo curve, mentre la b) tende ad escludere le variazioni troppo forti della quota balistica, così continua:

«Nel n. 4 è esposta la formula rigorosa la quale lega gli elementi differenziali che intervengono nella nostra questione, a prescinder dall'ipotesi a). Tale formula permette nei casi numerici dubbi di apprezzar l'ordine di grandezza dell'errore commesso in virtù della a). Per quel che concerne l'ipotesi b), non può presumersi di avere una correzione molto approssimata, se non nel caso in cui la variazione della quota balistica non superi i 4 ettometri. La pratica del tiro conferma pienamente questa previsione. Da ciò consegue che l'utilità della quota balistica si manifesta non tanto pel calcolo dei dati iniziali di tiro, quanto *pel calcolo delle correzioni preventive da apportarsi ai dati di aggiustamento di un tiro precedente, nelle riprese di fuoco.* L'aggiustamento elimina infatti tutte le cause di errore di cui non si può a priori apprezzar l'entità e delle quali perciò non si tien conto nel calcolo dei dati iniziali. (. . .)

Pei piccoli e medi calibri la correzione (2) può ritenersi in ogni caso sufficiente (. . .). *Pei grossi calibri e per taluni medi calibri a più lunga gittata, val la pena invece di cercare una correzione più raffinata.* Invero, per tali bocche da fuoco, (. . .) nel calcolo dei dati iniziali di tiro si tiene conto dell'influenza esercitata dal movimento di rotazione della terra, dal vento, dalle piccole variazioni di peso del proietto, dalla temperatura della carica, ecc. Di fronte a questa maggiore raffinatezza nella valutazione di tali cause d'errore, diventa necessaria una maggiore approssimazione anche nella correzione dipendente dalle variazioni di densità dell'aria; altrimenti resterebbe frustrato lo scopo per cui si tien conto delle suddette influenze (. . .).

Nel n. 5 si troverà dedotta *la formula di correzione più precisa*:

(4) $$\Delta X = C_1(A-1) + 0.006C_1(A-1)^2,$$

che fornisce la variazione della gittata X sull'orizzonte della bocca da fuoco (. . .). La (4) mostra che la formula $C_1(A-1)$, per $A > 1$ (che è il caso consueto) fornisce una correzione più piccola di quella che occorrerebbe in realtà. *Questa deduzione è confermata pienamente dalla pratica del tiro*: è stata anzi l'osservazione dei risultati del tiro, che mi ha mostrato come valesse la pena di procurarsi un ulteriore termine correttivo».

---

(29) Severi cita qui [1], p. 71, e ricorda che un'altra forma interessante della a) si trova in [2], p. 311, e consiste sostanzialmente nel ridurre a quadrature l'equazione dell'odografa sostituendo agli sviluppi in serie di certe funzioni i primi termini delle serie stesse. Osserva poi che «questo metodo di considerare le cose concorda con quello del Fubini, secondo cui l'applicazione del metodo Siacci equivale ad arrestarsi al primo termine della serie fornita dal metodo classico delle approssimazioni successive», e cita il lavoro [8] di Fubini, p. 154.

3.2. Severi inizia quindi (n. 1, pp. 304 - 307) a trattare della correzione, in prima approssimazione, della variazione di gittata dipendente dal cambiamento di densità dell'aria. Considera l'espressione della densità balistica μ dell'aria

$$\mu = kB/(273 + \tau) \qquad (k = 0.3852); \tag{3.1}$$

differenziando la (3.1) e considerando i differenziali come incrementi finiti ricava $\Delta\mu/\mu$ e, tenuto conto dell'espressione di ΔX (30), deduce la formula (3), dove la quota balistica A ha l'espressione (1).

Seguono alcune osservazioni su applicazioni concrete e vengono successivamente valutati (n. 2, pp. 307 - 308) gli errori tollerabili nelle letture della temperatura e della pressione: dalla (3) si deduce che un errore di 1° C nella misura della temperatura porta ad un errore che non supera $2 \cdot 10^{-3} X$; si mostra successivamente che tale errore risulta trascurabile e si conclude che «*è più che sufficiente far la lettura della temperatura di 2 in 2 gradi*», e «similmente si vede che *è sufficiente eseguire la lettura della pressione di 5 in 5 mm*», ciò che mostra come sia «lecito non tener conto dell'umidità (la quale influisce sulla densità dell'aria non più di una variazione di 3 mm di pressione)».

Viene quindi trattato (n. 3, pp. 308 - 310) il problema delle relazioni fra le quote balistiche di luoghi diversi, il cui studio conduce ad una semplice legge fra le quote balistiche A, A' di due luoghi che si trovino «in condizioni climatologiche simili», ciò che «permette di scegliere per ogni zona di terreno, che presenti una certa uniformità climatologica, una *stazione meteorologica di tiro*, la quale serve per tutte le batterie dislocate in quella zona».

3.3. Viene stabilita (n. 4, pp. 310 - 311) una «formula rigorosa che lega il differenziale della gittata ai differenziali dei coefficienti balistici ridotti» e che «deriva rigorosamente dalle equazioni differenziali del moto, senza alcuna ipotesi complementare (all'infuori di quella, d'indole sperimentale, che concerne l'espressione della ritardazione dovuta all'aria, mediante la funzione resistente)». Severi si rifà alle classiche funzioni balistiche principali di Siacci, già qui ricordate: tale formula è ottenuta, cioè «senza premetter l'ipotesi a), cui si è accennato nell'introduzione (valori medi di β tutti eguali fra loro) (. . .) limitatamente al caso in cui varii soltanto la densità μ dell'aria all'origine della traiettoria».

Successivamente viene dedotta (n. 5, pp. 311 - 314) una «formula più approssimata della (3) per la correzione della gittata, dipendente da un cambiamento della quota balistica». Severi ricorda di avere avuto occasione di seguire l'applicazione pratica della (3) e di avere constatato che «in genere *il tiro eseguito coi*

(30) Come è data, ad es., in [1], p. 136, o in [4], p. 347.

dati calcolati mediante la (3) tende ad esser lungo: la correzione però agisce sempre in senso utile (talché, se non si fosse eseguita, il tiro sarebbe stato ancora più lungo)». Mostra quindi che il fatto sperimentato che la (3) fornisca una correzione un po' più piccola del vero è pienamente d'accordo con alcune considerazioni teoriche: riprende una precedente formula che fornisce $dX/d\mu$ e, derivando di nuovo rispetto a μ ed esprimendo ΔX con la formula di Taylor arrestata alle derivate seconde, deduce il risultato

$$\Delta X > C_1(A-1),$$

in accordo con quanto sopra affermato; trova poi per ΔX l'espressione, più approssimata della (3), seguente

$$\Delta X = C_1(A-1) + \frac{C_1}{2\alpha}\left[\frac{1}{\alpha}\left(\frac{dC_1}{dX}\right)_{\mu=1} + 1\right](A-1)^2 \tag{3.2}$$

(dove $\alpha = 0.0085$). Una valutazione numerica del secondo termine correttivo che figura nella (3.2) conduce poi alla formula di correzione (4).

Seguono quindi (n. 6, pp. 315 - 317) alcune interessanti «riflessioni sulla opportunità di adottare tavole di tiro grafico-numeriche invece delle tavole numeriche» e osservazioni sull'«uso delle formule di correzione dei nn. 1 e 5 quando si disponga di tavole grafico-numeriche». Ciò riguarda specialmente il caso di «tiri molto curvi su bersagli che presentino un notevole dislivello rispetto alla bocca da fuoco», per i quali le tavole di tiro numeriche allora in uso riuscivano insufficienti.

Emergono qui osservazioni analoghe a quelle fatte da G. Fubini in [8] e da M. Picone in [19], ad esempio quando Severi dice (p. 315): «Sono insufficienti le ordinarie tavole di tiro, che prescrivon l'uso del coefficiente C_2 per la correzione del dislivello pezzo-bersaglio, a causa del modo grossolano con cui si valuta C_2 (31)». Mostra poi che «*il concetto di quota balistica permette di sfruttar meglio*

(31) Anche Severi allude qui al coefficiente di correzione C_2 di Parodi (cfr. annotazione (7) di questa Nota) e agli inconvenienti ai quali aveva dato luogo l'uso di tale coefficiente: come abbiamo visto, anche i primi contributi apportati alla balistica da Fubini (come quelli, contemporanei, di Picone) erano rivolti ad ottenere più razionali metodi di correzione. Anche E. Cavalli, del resto, riconosce chiaramente, in [3], l'insufficienza del coefficiente C_2, laddove dice (pp. 5 - 6): «La formula data [nel 1889] dal Parodi per il calcolo del coefficiente C_2 era, com'è naturale, soltanto approssimata; ma nei limiti di distanza e di angoli che allora si impiegavano per le artiglierie (. . .) forniva un'approssimazione sufficiente. (. . .) Quando invece cominciarono a far parte del parco d'assedio bocche da fuoco con maggiori gittate e che potevano sparare con angoli molto grandi, si cominciò a manifestare l'insufficienza del coefficiente C_2. Gli inconvenienti aumentarono durante la recente guerra (. . .); infine la correzione del C_2 divenne un punto debole nella pratica del tiro».

anche le vecchie tavole grafiche» già in uso, e illustra un nuovo criterio per la costruzione di «tavole grafico-numeriche mediante cui si potrebbero risolvere con precisione e rapidità, ed in modo completo, i vari problemi di tiro»; tratta infine dettagliatamente (n. 7, pp. 317 - 322) dei vantaggi che si ottengono, anche nel «tiro a tempo», con l'impiego della nozione di quota balistica.

BIBLIOGRAFIA.

[1] BIANCHI G., *Corso teorico-pratico di Balistica esterna*, Pasta, Torino, 1910.
[2] BIANCHI G., *Il calcolo delle tavole di tiro per le artiglierie a tiro molto teso*, Riv. Artigl. Genio, 31, vol. I (1914), 261 - 312.
[3] CAVALLI E., *Contributi necessari al progresso della Balistica*, Riv. Artigl. Genio, 36, vol. I (1919), 5 - 84.
[4] CHARBONNIER P., *Balistique extérieure rationnelle*, Doin, Paris 1907.
[5] CHARBONNIER P., *Traité de Balistique extérieure*, t. I, II, Doin et Gauthier-Villars, Paris 1921, 1927.
[6] CRANZ C. et VALLIER E., *Balistique extérieure*, Enc. des Sc. Math., t. IV, **6**, fasc. 1 (1913), 1 - 105.
[7] D'ADHEMAR R., *La Balistique extérieure*, Mémor. Sci. Math., fasc. 65, Gauthier-Villars, Paris 1934.
[8] FUBINI G., *Alcune formole di balistica esterna con speciale riguardo al problema della correzione del tiro*, Atti Accad. Naz. Lincei Rend. Cl. Sci. Fis. Mat. Natur. (5) 26, 1° sem. (1917), 151 - 161.
[9] FUBINI G., *Osservazioni sul calcolo della traiettoria di un proietto*, Ibidem, 214 - 219.
[10] FUBINI G., *Alcune osservazioni relative ai problemi secondari della balistica esterna*, in «Scritti Matematici offerti ad Enrico D'Ovidio», Bocca, Torino 1918, 158 - 163.
[11] FUBINI G., *Alcune osservazioni sui problemi della balistica esterna*, Atti Accad. Naz. Lincei Rend. Cl. Sci. Fis. Mat. Natur. (5) 28, 1° Sem. (1919), 374 - 377.
[12] FUBINI G., *Quelques recherches de balistique extérieure*, Mémor. Artill. Franç. (1925), 381 - 393.
[13] FUBINI G., *An elementary property of the trajectories of a projectile*, Amer. Math. Monthly, 48 (1941), 397 - 399.
[14] FUBINI G., *Una observación elemental sobre las ecuaciones de la balística externa*, Math. Notae, 2 (1942), 3 - 10.
[15] FUBINI G., *Opere scelte*, vol. I, II, III, Cremonese, Roma 1957 - 1962.
[16] MOULTON F. R., *New Methods in Exterior Ballistics*, Univ. Chicago Press, Chicago 1926.
[17] MOULTON F. R., *Methods in Exterior Ballistics*, Dover Publ., New York 1962.
[18] PARODI C., *Sul tiro arcato a carica fissa*, Riv. Artigl. Genio, 6, vol. II (1889), 61 - 75.
[19] PICONE M., *Formole razionali per la correzione del tiro*, Atti Accad. Sci. Torino Cl. Sci. Fis. Mat. Natur., 52 (1916 - 1917), 430 - 449.
[20] PICONE M., *Sul tiro dei medi e dei grossi calibri in montagna*, Riv. Artigl. Genio, 34, vol. III e IV (1917), pp. 31.
[21] PICONE M., *Tavole di tiro da montagna*, fasc. I-A (pp. 60), I-B (pp. 130), II (pp. 159), III (pp. 217), IV (pp. 231), Comando Artigl. VI Armata, 1918.
[22] PICONE M., *Sul calcolo della perturbazione nel moto dei proietti dovuta al vento*, Riv. Artigl. Genio, 36, vol. III (1919), 55 - 98.
[23] SEGRE B., *Commemorazione di Guido Fubini*, Atti Accad. Naz. Lincei Rend. Cl. Sci. Fis. Mat. Natur. (8) 17 (1954), 276 - 294.

[24] SEGRE B., *L'opera scientifica di Francesco Severi*, Rend. Mat. Appl. (5) **21** (1962), 524 - 584.
[25] SEVERI F., *Sulle correzioni al tiro d'artiglieria dipendenti dalle variazioni della densità dell'aria*, Ist. Veneto Sci. Lett. Arti Cl. Sci. Mat. Natur., 78, parte II (1919), 297 - 322.
[26] SIACCI F., *Balistica*, 2ª ediz., Casanova, Torino 1888.
[27] SIACCI F., *Sulla soluzione rigorosa del problema balistico*, Riv. Artigl. Genio, **7**, vol. IV (1890), 5 - 19.
[28] SIACCI F., *Balistique extérieure*, Berger-Levrault, Paris 1892.
[29] TANZI CATTABIANCHI L., *I contributi di Mauro Picone alla Balistica razionale*, Riv. Mat. Univ. Parma (4) **3** (1977), 357 - 389.
[30] TERRACINI A., *Ricordi di un matematico*, Cremonese, Roma 1968.

FROIM MARCUS

ON THE METRICS OF G. FUBINI

Introduction.

This year marks the centennial of the birth of the great mathematician G. Fubini and for me, as an old student of his, this is the best occasion to recall some of his important results collected in his «Opere Scelte» Edizione Cremonese Roma 1957. We have chosen to recall the results obtained by G. Fubini in the *theory of quadratic Hermitian forms and their metrics*. We owe the reason for this choice to the reading of Kähler's paper [4] «*Über eine bemerkenswerte Hermitische Metric*», in which this author *makes no mention of the name of Fubini and of his fundamental papers on the quadratic Hermitian forms and their metrics*. Likewise we must observe that eminent geometers like Chern [6] p. 116 and Kobayashi and Nomizu [7], *refer only to one of Fubini's papers*. Similarly we shall show that the two metrics considered in [7] p. 160 and 162, as examples of Kähler metric, calling the first by the authors the «Fubini-Study metric», *was obtained by Fubini in his papers where he considered the groups which leave fixed a single or a system of Hermitian forms of the elliptical or hyperbolic types*.

Pseudodistance and pseudo-motion.

1. In [1] Fubini considers a Hermitian form reduced to the type

$$x_1 x_1^0 + x_2 x_2^0 + \ldots + x_{n-1} x_{n-1}^0 - x_n x_n^0, \tag{1.1}$$

in n variables x_i of which x_i^0 are the complex conjugates, and the group of transformations

$$x_i' = \sum\nolimits_k a_{ik} x_k, \tag{1.2}$$

with $\det (a_{ik}) = 1, (i = 1, 2, \ldots, n)$, which transforms the given form into itself. Then the transformation

$$u_i' = \frac{a_{i1}u_1 + a_{i2}u_2 + \ldots + a_{i,n-1}u_{n-1} + a_{in}}{a_{n1}u_1 + a_{n2}u_2 + \ldots + a_{n,n-1}u_{n-1} + a_{n,n}}; \tag{1.3}$$

of the variables $u_1, u_2, \ldots, u_{n-1}$, where

$$u_i = \frac{x_i}{x_n}, \tag{1.4}$$

forms a group which transforms the hypervariety (in the sense of C. Segre)

$$\sum_1^{n-1} u_i u_i^0 - 1 = 0, \tag{1.5}$$

into itself. Putting $u_i = u_i' + iu_i''$, $u_i^0 = u_i' - iu_i''$ $(i = 1, 2, \ldots, n-1)$, (1.5) is the hypersphere

$$(u_1')^2 + (u_1'')^2 + (u_2')^2 + (u_2'')^2 + \ldots - 1 = 0. \tag{1.6}$$

Fubini now proceeds to prove that the pair of points $(u_i'u_i'')$ and $(\bar{u}_i\bar{u}_i'')$ have a symmetrical invariant with respect to all transformations (1.3) which satisfies

$$S' = \frac{S}{\operatorname{mod}^2 (a_{n1}u_1 + a_{n2}u_2 + \ldots + a_{n,n-1}u_{n-1} + a_{n,n})}, \tag{1.7}$$

where S is the left-hand side of (1.6) and S' its image under (1.3).

This invariant is given by

$$R_{u\bar{u}} = \frac{\left(\sum_1^{n-1} u_i\bar{u}_i^0 - 1\right)\left(\sum_1^{n-1} u_i^0\bar{u}_i - 1\right)}{\left(\sum_1^{n-1} u_i u_i^0 - 1\right)\left(\sum_1^{n-1} \bar{u}_i\bar{u}_i^0 - 1\right)} - 1. \tag{α}$$

Indeed, if $v_i, \bar{v}_i$ are the images of u_i and $\bar{u}_i$ under (1.3) then one has expressions of the form

$$\sum_1^{n-1} v_i v_i^0 - 1 = \frac{\sum_1^{n-1} u_i u_i^0 - 1}{A \cdot B}, \tag{1.8}$$

where

$$A = a_{n,1}u_1 + a_{n,2}u_2 + \ldots + a_{n,n-1}u_{n-1} + a_{n,n},$$

$$B = a_{n,1}^0 u_1^0 + a_{n,2}^0 u_2^0 + \ldots + a_{n,n-1}^0 u_{n-1}^0 + a_{n,n}^0.$$

$R_{u\bar{u}}$ is real. If $R_{u\bar{u}}$ is equal to zero and the two points $u, \bar{u}$, are inside the hypersphere (1.6) then they coincide. If $R_{u\bar{u}}$ is infinitesimal the two points are infinitesimally close. $R_{u\bar{u}}$ is positive if the two points are distinct and inside (1.6). Fubini calls $\sqrt{R_{u\bar{u}}}$ *the pseudodistance of the points* $u, \bar{u}$, *and (1.3) a pseudo-motion*.

Fubini shows that (α) can also be written out in the form

$$(\alpha_1) \qquad \frac{\begin{pmatrix} u_1, u_2, \ldots, u_{n-1}, i \\ \bar{u}_1, \bar{u}_2, \ldots, \bar{u}_{n-1}, i \end{pmatrix}}{\left(\sum_1^{n-1} u_i u_i^0 - 1\right)} \cdot \frac{\begin{pmatrix} \bar{u}_1^0, \bar{u}_2^0, \ldots, \bar{u}_{n-1}^0, i \\ u_1^0, u_2^0, \ldots, u_{n-1}^0, i \end{pmatrix}}{\left(\sum_1^{n-1} \bar{u}_i \bar{u}_i^0 - 1\right)},$$

$i = \sqrt{-1}$, with multiplication effected row by row. It is assumed that the two points are inside (1.6). Finally, Fubini observes that using one of (1.3) we can carry one of the point, for instance the point u, to the center of the hypersphere (1.6). Then $R_{u\bar{u}}$ becomes

$$(\alpha_2) \qquad R_{u\bar{u}} = \frac{1}{1 - \sum_1^{n-1} ((\bar{u}')^2 + (\bar{u}_i'')^2)}.$$

In this case we can write

$$(\alpha_3) \qquad R_{u\bar{u}} = \frac{\begin{pmatrix} 0, 0, \ldots, 0, i \\ \bar{u}_1, \bar{u}_2, \ldots, \bar{u}_{n-1}, i \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \bar{u}_1^0, \bar{u}_2^0, \ldots, \bar{u}_{n-1}^0, i \\ (0, 0, \ldots, 0, i \end{pmatrix}}{\sum_1^{n-1} (1 - \bar{u}_1 \bar{u}_1^0)},$$

or

$$(\mathrm{M}) \qquad R_{u\bar{u}} = -\frac{\sum_1^{n-1} \bar{u}_i \bar{u}_i^0}{\sum_1^{n-1} \bar{u}_i \bar{u}_i^0 - 1}.$$

The metrics of Fubini.

2. Fubini showed in [2] that the projective transformations of an Hermitian form

$$(2.1)\qquad x_1x_1^0 + x_2x_2^0 + \dots + x_{n-1}x_{n-1}^0 \pm x_nx_n^0,$$

into itself become, when expressed in terms of u_1, u_1^0, a group of motion in the real metric

$$(\beta_1)\qquad ds^2 = \frac{\begin{pmatrix} u_1, u_2, \dots, u_{n-1}, \sqrt{\pm 1} \\ du_1, du_2, \dots, du_{n-1}, 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} du_1^0, du_2^0, \dots, du_{n-1}^0, 0 \\ u_1^0, u_2^0, \dots, u_{n-1}^0, \sqrt{\pm 1} \end{pmatrix}}{\left(\sum_1^{n-1} u_iu_i^0 \pm 1\right)^2},$$

which we shall write in the form

$$(\beta_2)\qquad ds^2 = \frac{\begin{vmatrix} \sum_1^{n-1} u_i\, du_i^0 & \sum_1^{n-1} u_iu_i^0 \pm 1 \\ \sum_1^{n-1} du_i\, du_i^0 & \sum_1^{n-1} u_i^0\, du_i \end{vmatrix}}{\left(\sum_1^{n-1} u_iu_i^0 \pm 1\right)^2}.$$

We obtain in this way the two metrics of Fubini which are given by:

$$(F_1)\qquad ds^2 = \frac{\left(\sum_1^{n-1} u_i\, du_i^0\right)\left(\sum_1^{n-1} u_i^0\, du_i\right) - \left(\sum_1^{n-1} du_i\, du_i^0\right)\left(\sum_1^{n-1} u_iu_i^0 - 1\right)}{\left(\sum_1^{n-1} u_iu_i^0 - 1\right)^2},$$

and

$$(F_2)\qquad ds^2 = \frac{\left(\sum_1^{n-1} u_i\, du_i^0\right)\left(\sum_1^{n-1} u_i^0\, du_i\right) - \left(\sum_1^{n-1} du_i\, du_i^0\right)\left(\sum_1^{n-1} u_iu_i^0 + 1\right)}{\left(\sum_1^{n-1} u_iu_i^0 + 1\right)^2},$$

The first, which correspond to lower sign of (2.1) *is called by Fubini the hyperbolic metric*:

It follows, as we have observed in the introduction, that it is G. Fubini which first introduced the two Hermitian metrics, one of hyperbolic and the other of elliptic types.

In [3] the Hermitian metrics of hyperbolic type are called by Fubini *P metrics after Poincarè*. If we consider the Hermitian form $xx_0 - yy_0$, then from (F_1) one has

$$(\beta_3) \qquad ds^2 = \frac{du_1\, du_1^0}{(1-u_1u_0)^2} = \frac{(du_i')^2 + (du_1'')^2}{[1-((u_1')^2+(u_1'')^2)]^2}.$$

The metrics of E. Kähler.

3. In [4] E. Kähler showed that in the study of the invariants of a real $2n$--dimensional Hermitian metric

$$(3.1) \qquad ds^2 = \sum g_{i\bar{k}}\, dx_i\, d\bar{x}_k,$$

in the context of the pseudoconformal transformation

$$(3.2) \qquad x_i' = \phi_i(x_1, x_2, \ldots, x_n); \qquad \bar{x}_i' = \bar{\phi}_i(\bar{x}_1, \bar{x}_2, \ldots, \bar{x}_n)$$

$(i = 1, 2, \ldots, n)$ it is useful to consider the exterior form

$$(3.3) \qquad \omega = \sum g_{i\bar{k}}\, d(x_i \bar{x}_k),$$

where $\bar{x}$ are the complex conjugates of x. Kähker observed that $\omega' = 0$ is a noteworthy exception; it turns out that in this case the metric

$$(3.4) \qquad ds^2 = \frac{\partial^2 U}{\partial x_i\, \partial \bar{x}_k}\, dx_i\, d\bar{x}_k,$$

is derived from a potential which is evidently an invariant, equivalent to the condition $\omega' = 0$. To this type as Kähler observes belong some metrics which appear in the theory of automorphic functions. If

$$(3.5) \qquad x_i' = \frac{L_i(x)}{L_0(x)} = \frac{\alpha_{i0} + \alpha_{i1}x_1 + \ldots + \alpha_{in}x_n}{\alpha_{00} + \alpha_{01}x_1 + \ldots + \alpha_{0n}x_n},$$

$(i = 1, 2, \ldots, n)$ are projective transformation which transform the hypersphere

$$(3.6) \qquad 1 - x_1\bar{x}_1 - x_2\bar{x}_2 - \ldots - x_n\bar{x}_n = 0,$$

into itself, then because

$$(3.7) \qquad 1 - \sum x_i'\bar{x}_i' = \left(1 - \sum_i x_i\bar{x}_i\right)(L_0(x)\ \ (L_0(\bar{x}))^{-1},$$

(compare with (1.8)), the metric

$$ds^2 = \sum \frac{\partial^2 U}{\partial x_i \, \partial \bar{x}_k} \, dx_i \, d\bar{x}_k, \tag{3.8}$$

where

$$U = k \log \left(1 - \sum x_i \bar{x}_i\right), \tag{3.9}$$

with k constant, is invariant under the group of hyperfuchsian transformation (3.5).

The case $U = k \log \left(1 - \sum x_i \bar{x}_i\right)$ and Fubini's metrics.

4. *We will show that if U is given by (3.9), the metrics presented by Kähler are non other than that of Fubini multiplied by a constant k.*

To prove our point, let us consider the exemples treated by Fubini in [5] page 111 and in [3] page 146 of the second volume; let

(4.1) $xx_0 + yy_0 - zz_0$ *be an indefinite Hermitian form* A, x_0, y_0, z_0

the complex variables, and

$$\frac{x}{z} = u_1 = u_1' + iu_1''; \quad \frac{y}{z} = u_2' + iu_2'' \qquad (i = \sqrt{-1}) \tag{4.2}$$

where u_1', u_2', u_1'', u_2'' are real variables. The linear element of the corresponding metric (F_1) follows

$$(\delta_1) \qquad ds^2 = [(1 - u_2 u_2^0)\, du_1\, du_1^0 + (1 - u_1 u_1^0)\, du_2\, du_2^0 + \\ + u_1 u_2^0\, du_1^0\, du_2 + u_2 u_1^0\, du_1\, du_2^0] \cdot [(1 - u_1 u_1^0 - u_2 u_2^0)^2]^{-1}.$$

If we consider the Hermitian form

$$xx_0 + yy_0 + zz_0, \tag{4.3}$$

then from (F_2) results

$$(\delta_2) \qquad ds^2 = [-(1 + u_2 u_2^0)\, du_1\, du_1^0 + u_1^0 u_2\, du_1\, du_2^0 + u_1 u_2^0\, du_1^0\, du_2 - \\ -(1 + u_1 u_1^0)\, du_2\, du_2^0] \cdot [(1 + u_1 u_1^0 + u_2 u_2^0)^2]^{-1}.$$

It is seen from (δ_1) and (δ_2) that the coefficients of $du_i\, du_k^0$ in the two cases are given by

$$(\gamma_1) \qquad \frac{\partial^2 \log \left(1 - \sum_1^2 u_i u_i^0\right)^{-1}}{\partial u_i \, \partial u_k^0} = \frac{\partial^2 \log (1 - u_1 u^0 - u_2 u_2^0)^{-1}}{\partial u_i \, \partial u_k^0},$$

in the first case, and in the second

$$(\gamma_2) \qquad \frac{\partial^2 \log \left(\sum_1^2 u_i u_i^0 + 1\right)^{-1}}{\partial u_i \, \partial u_k^0} = \frac{\partial^2 \log (1 + u_1 u_1^0 + u_2 u_2^0)^{-1}}{\partial u_i \, \partial u_k^0}.$$

Setting

$$(4.4) \qquad U = -\log \left(1 - \sum u_i u_i^0\right),$$

or

$$(4.5) \qquad U = -\log \left(1 + \sum u_i u_i^0\right),$$

this is setting $k = -1$ in Kähler's expression (3.9) we generally get

$$(\mathrm{F}) \qquad ds^2 = \sum \frac{\partial^2 U}{\partial u_i \, \partial u_k^0} \, du_i \, du_k^0,$$

and conversely.

There we have the following results:

The metrics presented by E. Kähler are non other than those of Fubini's multiplied by constants, iff (3.9) holds. Q.E.D.

REFERENCES.

[1] FUBINI G., *Sulla teoria delle forme quadratiche Hermitiane e dei sistemi di tale forme*, Atti Acc. Gioenia (4) (17) 1903 or G. Fubini, *Opere Scelte*, vol. I, edizione Cremonese, Roma 1957, pp. 279 - 374.

[2] FUBINI G., *Sulla teoria dei gruppi discontinui*, Ann. di Mat. (3), 11, 1905 pp. 159 - 186 or vol. II *Opere Scelte*, pp. 93 - 120.

[3] FUBINI G., *Sulla teoria delle funzioni automorfe e delle loro trasformazioni*, Ann. di Mat. (3) 14, 1907 pp. 33 - 67 or vol. II *Opere Scelte*, pp. 139 - 171.

[4] KÄHLER E., *Über eine bemerkenswerte Hermitesche Metric*, Hamburg Universitaet Math. Seminar Abhandlungen vol. 9, 1933, pp. 173 - 186.

[5] FUBINI G., *Applicazioni analitiche dei gruppi di proiettività etc.*, Atti Acc. Gioenia (4), 17, 1903 or vol. I *Opere Scelte*, pp. 325 - 332.

[6] SHUNG-SHEN-CHERN, *Characteristic classes of Hermitian manifolds*, Annals of Math., vol. 47, pp. 85 - 121.

[7] KOBAYASHI-NOMIZU, *Fundation of Diff. Geometry*, Interscience Publishers, London, 1969.

INDICE